



第五章

三角函数

5.1 任意角和弧度制

5.1.1 任意角



对点上分

1. D 【解析】 \because 分针是顺时针走的, \therefore 形成的角度是负角, 又分针走过了 10 分钟, \therefore 走过的角度大小为 $\frac{10}{60} \times 360^\circ = 60^\circ$, \therefore 分针走过的角度是 -60° . 故选 D.

2. A 【解析】小于 90° 的角比如 -60° , 不是锐角, 故①错误;
第二象限的角比如 -240° , 不是钝角, 故②错误;
终边重合的角比如 30° 与 390° , 不相等, 故③错误;
相等的角终边一定重合, 故④正确.

3. A 【解析】钝角大于 90° 小于 180° , 是第二象限角, A 正确;
第二象限角不是都比第三象限角小, 如 100° 角在第二象限, -100° 角在第三象限, 但 $100^\circ > -100^\circ$, B 错误;
任意角除了包括正角和负角外, 还有零角, C 错误;
直角三角形中, 直角不是象限角, 是轴线角, D 错误. 故选 A.

4. ABD 【解析】 $423^\circ = 63^\circ + 360^\circ$, 即 63° 角与 423° 角终边相同, A 正确;
 $1\,143^\circ = 63^\circ + 3 \times 360^\circ$, 即 63° 角与 $1\,143^\circ$ 角终边相同, B 正确;
 $-117^\circ = 63^\circ - 180^\circ$, 即 63° 角与 -117° 角终边不相同, C 错误;
 $-297^\circ = 63^\circ - 360^\circ$, 即 63° 角与 -297° 角终边相同, D 正确. 故选 ABD.

5. D 【解析】 \because 角 α 与角 β 的终边关于 y 轴对称, $\therefore \frac{\alpha + \beta}{2} = 90^\circ + k \cdot 180^\circ, k \in \mathbf{Z}$,
即 $\alpha + \beta = 180^\circ + k \cdot 360^\circ = (2k + 1) \cdot 180^\circ (k \in \mathbf{Z})$. 故 D 正确.

**易错警示** 轴对称的特征表示错误而出错

角 α, β 终边关于 y 轴对称时, 其关系为 $\frac{\alpha+\beta}{2} = 90^\circ + k \cdot 180^\circ (k \in \mathbf{Z})$, 此处表示容易出现错误, 需要注意.

6. C 【解析】当 $k = 2n (n \in \mathbf{Z})$ 时, $n \cdot 360^\circ + 45^\circ \leq \alpha \leq n \cdot 360^\circ + 90^\circ$, 此时 α 表示的范围与 $45^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ 表示的范围一致;

当 $k = 2n + 1 (n \in \mathbf{Z})$ 时, $n \cdot 360^\circ + 225^\circ \leq \alpha \leq n \cdot 360^\circ + 270^\circ$, 此时 α 表示的范围与 $225^\circ \leq \alpha \leq 270^\circ$ 表示的范围一致. 故选 C.

7. A 【解析】 \because 角 α, β 终边相同, $\therefore \alpha = k \cdot 360^\circ + \beta, k \in \mathbf{Z}$.

$\therefore \alpha - \beta = k \cdot 360^\circ + \beta - \beta = k \cdot 360^\circ, k \in \mathbf{Z}$,

$\therefore \alpha - \beta$ 的终边在 x 轴的非负半轴上. 故选 A.

8. C 【解析】 $\because k \cdot 360^\circ < 2\alpha < 180^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbf{Z}, \therefore k \cdot 180^\circ < \alpha < 90^\circ + k \cdot 180^\circ, k \in \mathbf{Z}$.

当 k 为偶数时, α 是第一象限角; 当 k 为奇数时, α 是第三象限角.

综上, α 为第一或第三象限角. 故选 C.

9. AB 【解析】因为 α 与 $-\alpha$ 的终边关于 x 轴对称, 而 α 是第二象限角, 所以 $-\alpha$ 是第三象限角, 所以 $\pi - \alpha$ 是第一象限角, 故 A 正确, D 错误;

因为 α 是第二象限角, 所以 $\frac{\pi}{2} + 2k\pi < \alpha <$

$\pi + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 所以 $\frac{\pi}{4} + k\pi < \frac{\alpha}{2} <$

$\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 故 $\frac{\alpha}{2}$ 是第一或第三象限角, 故 B 正确;

因为 α 是第二象限角, 所以 $\frac{3\pi}{2} + \alpha$ 是第一象限角, 故 C 错误.

5.1.2 弧度制**对点上分**

1. D 【解析】根据角度和弧度的概念可知二者都是角的度量单位, 1° 的角是周角的 $\frac{1}{360}$, 1 rad 的角是周角的 $\frac{1}{2\pi}$, 故 AB 正确;



$$1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi} \right)^{\circ} \approx 57.30^{\circ} > 1^{\circ}, \text{故 C 正确;}$$

无论哪种角的度量方法,角的大小都与圆的半径无关,只与角的始边和终边的位置有关,故 D 错误.

2. C 【解析】依题意,二十四节气将一个

圆 24 等分,所以每一份的弧度数为 $\frac{2\pi}{24} =$

$\frac{\pi}{12}$,从谷雨到大雪,二十四节气圆盘需要

顺时针旋转 15 个格,所以 $|\alpha| = 15 \times \frac{\pi}{12} =$

$\frac{5\pi}{4}$. 故选 C.

3. $\frac{1}{2}$ 【解析】设扇形的圆心角为 α ,扇形

的半径 $R = 4$,由扇形的弧长公式 $l = \alpha R$,

可得 $\alpha = \frac{l}{R} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

4. B 【解析】 $540^{\circ} = 540 \times \frac{\pi}{180} = 3\pi$.

5. ABD 【解析】 $67^{\circ}30' = 67.5^{\circ}$,化成弧度

是 $\frac{\pi}{180} \times 67.5 = \frac{3}{8}\pi$,故 A 正确;

$-\frac{10}{3}\pi = -\frac{10}{3} \times 180^{\circ} = -600^{\circ}$,故 B 正确;

$-150^{\circ} = -150 \times \frac{\pi}{180} = -\frac{5}{6}\pi$,故 C 错误;

$\frac{\pi}{12} = \frac{1}{12} \times 180^{\circ} = 15^{\circ}$,故 D 正确.

6. $\beta < \alpha < \theta$ 【解析】因为 $\beta = \frac{\pi}{6} \times \left(\frac{180}{\pi} \right)^{\circ} =$

30° , $\theta = 2 \times \left(\frac{180}{\pi} \right)^{\circ} \approx 2 \times 57.3^{\circ} = 114.6^{\circ}$,

所以 $\beta < \alpha < \theta$.

7. C 【解析】与角 $-\frac{7\pi}{6}$ 的终边相同的角的

表达式为 $2k\pi - \frac{7\pi}{6} (k \in \mathbf{Z})$ 或 $k \cdot 360^{\circ} -$

$210^{\circ} (k \in \mathbf{Z})$. 故选 C.

8. D 【解析】当 $\alpha = \frac{\pi}{2}$ 时,满足 $0 < \alpha < \pi$,但

α 的终边落在 y 轴的非负半轴上,故充分性不成立;

当 $\alpha = \frac{7\pi}{3}$ 时, α 的终边落在第一象限,故

必要性不成立.

综上,“ $0 < \alpha < \pi$ ”是“ α 的终边落在第一象限或落在第二象限”的既不充分也不必要条件. 故选 D.



9. C 【解析】 \because 角 α 的终边为射线 OP , 且射线 OP_1 与 OP 关于 y 轴对称,

\therefore 以 OP_1 为终边的角的集合为 $\{\alpha_1 \mid \alpha_1 = 2m\pi + \pi - \alpha, m \in \mathbf{Z}\}$,

又 \because 射线 OP_2 与 OP_1 关于直线 $y = -x$ 对称,

\therefore 以 OP_2 为终边的角 $\beta = 2n\pi - \frac{\pi}{2} - \alpha_1 =$

$2(n-m-1)\pi + \frac{\pi}{2} - \alpha = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - \alpha, n, k \in$

\mathbf{Z} , 即所求集合为 $\left\{ \beta \mid \beta = 2k\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha, k \in \mathbf{Z} \right\}$. 故选 C.

10. $-\frac{4\pi}{9}$ 【解析】因为 $\alpha = -\frac{40}{9}\pi = -2 \times 2\pi -$

$\frac{4\pi}{9}$, β 与 α 的终边相同, 且 $\beta \in$

$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, 所以 $\beta = -\frac{4\pi}{9}$.

11. 【解】(1) 因为 $\alpha = 1\,200^\circ = 1\,200 \times \frac{\pi}{180} =$

$\frac{20\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + 3 \times 2\pi$, 所以角 α 与 $\frac{2\pi}{3}$ 的终边

相同, 且 $\frac{\pi}{2} < \frac{2\pi}{3} < \pi$, 所以角 α 是第二象限角.

(2) 题图①: 因为 $75^\circ = \frac{5\pi}{12}$, $330^\circ = \frac{11\pi}{6} =$

$2\pi - \frac{\pi}{6}$, 所以阴影部分内(不包括边

界)的角的集合为 $\left\{ \theta \mid 2k\pi - \frac{\pi}{6} < \theta < \right.$

$\left. 2k\pi + \frac{5\pi}{12}, k \in \mathbf{Z} \right\}$;

题图②: 因为 $30^\circ = \frac{\pi}{6}$, $90^\circ = \frac{\pi}{2}$, $210^\circ =$

$\frac{7\pi}{6} = \pi + \frac{\pi}{6}$, $270^\circ = \frac{3\pi}{2} = \pi + \frac{\pi}{2}$, 所以阴

影部分内(不包括边界)的角的集合为

$\left\{ \theta \mid k\pi + \frac{\pi}{6} < \theta < k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z} \right\}$.

12. B 【解析】设扇形的半径为 r , 则 $S =$

$\frac{1}{2}\alpha r^2 = \frac{1}{2} \times 2 \times r^2 = 4$, $\therefore r = 2$, 则扇形的

弧长为 $2 \times 2 = 4$, 故扇形周长为 $2r + 4 = 8$,

故选 B.

13. A 【解析】设等边 $\triangle ABC$ 的边长为 a ,

\widehat{AB} 的长度为 $\frac{60^\circ}{360^\circ} \pi \times 2a = \frac{6\pi}{3}$, 解得



$$a=6,$$

以 A 为圆心, AB 长为半径的扇形 ABC

的面积为 $\frac{60^\circ}{360^\circ}\pi \times 6^2 = 6\pi$, 等边 $\triangle ABC$ 的

$$\text{面积为 } \frac{1}{2} \times 6^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3},$$

勒洛三角形的面积为 $3 \times 6\pi - 2 \times 9\sqrt{3} = 18\pi - 18\sqrt{3}$. 故选 A.

14.2 【解析】 设扇形的圆心角为 α , 半径

$$\text{为 } r, \text{ 则 } \begin{cases} C = 2r + \alpha r = 8, \\ S = \frac{1}{2} \alpha r^2 = 4, \end{cases} \text{ 则 } \begin{cases} \alpha = 2, \\ r = 2. \end{cases}$$

15. 【解】 (1) 设该扇形菜地的半径为 r , 弧

$$\text{长为 } l, \text{ 则 } \begin{cases} l + 2r = 24, \\ l = \alpha r = 4r, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} l = 16, \\ r = 4, \end{cases}$$

故该扇形菜地的面积 $S = \frac{1}{2}lr = \frac{1}{2} \times 16 \times 4 = 32$ (平方米).

(2) 因为 $l + 2r = 24$, 所以 $l = 24 - 2r$, 则

$$S = \frac{1}{2}lr = \frac{1}{2}(24 - 2r)r = -r^2 + 12r = -(r - 6)^2 + 36.$$

当 $r = 6$ 时, S 取得最大值 36, 此时 $l =$

$$12, \text{ 从而 } \alpha = \frac{l}{r} = 2.$$

故该扇形菜地的圆心角为 2 弧度时, 菜地的面积取得最大值 36 平方米.

16. 【解】 (1) 利用扇形的面积公式可得

$$\frac{1}{2}\theta \times 20^2 - \frac{1}{2}\theta \times x^2 = 100, \text{ 所以 } \theta = \frac{200}{400 - x^2} (0 < x < 20);$$

(2) 依题意可得 $\widehat{AD} = x\theta$ 米, $\widehat{BC} = 20\theta$ 米, 所以栅栏的长度 $y = x\theta + 20\theta + 2 \times (20 - x)$,

将 $\theta = \frac{200}{400 - x^2}$ 代入上式, 整理可得 $y =$

$$2(20 - x) + \frac{200}{20 - x} = 2\left(20 - x + \frac{100}{20 - x}\right) \geq 4\sqrt{(20 - x) \times \frac{100}{20 - x}} = 40.$$

当且仅当 $x = 10$ 时取等号, 所以栅栏长度的最小值为 40 米.

5.1 节测上分

1. B 【解析】 因为 $-1\ 630^\circ = 170^\circ - 5 \times 360^\circ$,

且 170° 为第二象限角, 所以 $-1\ 630^\circ$ 角的终边在第二象限. 故选 B.



2. A 【解析】 $37^{\circ}30' = \frac{1}{2} \times 75^{\circ} = \frac{75}{2} \times \frac{\pi}{180} = \frac{5\pi}{24}$. 故选 A.

3. A 【解析】由于集合 $A = \left\{ \alpha \mid \alpha = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z} \right\}$, 所以集合 A 表示终边落在 y 轴上的角的集合;

由于集合 $B = \left\{ \alpha \mid \alpha = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z} \right\}$, 所以集合 B 表示终边落在 y 轴上的角的集合.

所以 $A=B$. 故选 A.

4. BCD 【解析】对于 A, $-\pi \text{ rad} = -180^{\circ}$, 故 A 正确;

对于 B, -300° 是第一象限角, 但不是锐角, 故 B 不正确;

对于 C, 设扇形半径为 r , 圆心角为 θ , 则面积为 $S_1 = \frac{1}{2}\theta r^2$, 若半径扩大一倍, 圆心角减小一半, 则此时的面积 $S_2 = \frac{1}{2} \times$

$\frac{\theta}{2} \times (2r)^2 = \theta r^2$, 故 C 不正确;

对于 D, 若 α 为第二象限角, 则 $2k\pi + \frac{\pi}{2} < \alpha < 2k\pi + \pi (k \in \mathbf{Z})$, 所以 $4k\pi + \pi < 2\alpha < 4k\pi + 2\pi (k \in \mathbf{Z})$, 所以 2α 可能是第三象限角, 也可能是第四象限角, 也可能在 y 轴的负半轴上, 故 D 不正确. 故选 BCD.

5. ACD 【解析】对于 A, 终边落在直线

$y=x$ 上的角的集合是 $\left\{ \alpha \mid \alpha = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z} \right\}$,

终边落在直线 $y=-x$ 上的角的集合是 $\left\{ \alpha \mid \alpha = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z} \right\}$,

所以终边在直线 $y=\pm x$ 上的角的集合是 $\left\{ \alpha \mid \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z} \right\}$, A 正确;

对于 B, 终边落在第二象限的角的集合为 $\left\{ \alpha \mid \frac{\pi}{2} + 2k\pi < \alpha < \pi + 2k\pi, k \in \mathbf{Z} \right\}$, 所以

角 α 不一定为钝角, 例如 $\alpha = \frac{17\pi}{6}$, 所以 B 错误;

对于 C, 因为角 α 是第一象限角, 所

以 $\left\{ \alpha \mid 2k\pi < \alpha < \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z} \right\}$,

所以 $\frac{2k\pi}{3} < \frac{\alpha}{3} < \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbf{Z}$, 所以

$-\frac{\pi}{6} - \frac{2k\pi}{3} < -\frac{\alpha}{3} < -\frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbf{Z}$,

当 $k = 3n$ 时, $-\frac{\alpha}{3} \in \left(-\frac{\pi}{6} - 2n\pi, -2n\pi \right), n \in \mathbf{Z}$, 位于第四象限,

当 $k = 3n + 1$ 时, $-\frac{\alpha}{3} \in \left(-\frac{5\pi}{6} - 2n\pi, -\frac{2\pi}{3} - 2n\pi \right), n \in \mathbf{Z}$, 位于第三象限,

当 $k = 3n + 2$ 时, $-\frac{\alpha}{3} \in \left(-\frac{3\pi}{2} - 2n\pi, -\frac{4\pi}{3} - 2n\pi \right), n \in \mathbf{Z}$, 位于第二象限,

所以 $-\frac{\alpha}{3}$ 为第二或第三或第四象限角, C 正确;

对于 D, 设扇形的半径为 R , 扇形的圆心角为 α , 则扇形的面积 $S = \frac{1}{2}\alpha R^2$, 所以

$$R = \sqrt{\frac{2S}{\alpha}},$$

设扇形的周长为 p , 弧长为 l , 则 $p = 2R +$

$$l = (2 + \alpha)R = (2 + \alpha)\sqrt{\frac{2S}{\alpha}} = \sqrt{2S} \times$$

$$\left(\frac{2}{\sqrt{\alpha}} + \sqrt{\alpha} \right) \geq \sqrt{2S} \times 2\sqrt{\frac{2}{\sqrt{\alpha}} \times \sqrt{\alpha}} = 4\sqrt{S},$$
 当

且仅当 $\frac{2}{\sqrt{\alpha}} = \sqrt{\alpha}$, 即 $\alpha = 2$ 时, 周长取得最

小值 $4\sqrt{S}$, D 正确. 故选 ACD.

6. $-\frac{6\pi}{11}$ 【解析】设从午夜零时起, 分针走了 t h 后与时针重合, 分针的角速度为

-2π rad/h, 时针的角速度为 $-\frac{\pi}{6}$ rad/h,

则 $2\pi t - \frac{\pi}{6}t = 2k\pi, k \in \mathbf{N}^*$, 得 $t = \frac{12}{11}k, k \in$

\mathbf{N}^* . 当 $k = 3$ 时, $t = \frac{36}{11}$, 这时时针所转的

角度为 $-\frac{\pi}{6} \times \frac{36}{11} = -\frac{6\pi}{11}$.

7. $\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{3}$ 【解析】因为正六边形

$ABCDEF$ 的边长为 1, 所以正六边形

$ABCDEF$ 的面积为 $6 \times \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$,



扇形 ABF 的面积为 $\frac{1}{2} \times 1^2 \times \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$, 所

以阴影部分的面积为 $\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{3}$.

8. 【解】(1) 在扇形 OAD 中, 由题意得 $AB = x$ m, $OA = 2x$ m,

由扇形面积公式得扇形 OAD 的面积为

$2x \times 2x \times \frac{1}{2} \times \theta = 2x^2 \theta$ (m²), 扇形 OBC 的面

积为 $x \times x \times \frac{1}{2} \times \theta = \frac{1}{2} x^2 \theta$ (m²), 故 $y =$

$2x^2 \theta - \frac{1}{2} x^2 \theta = \frac{3}{2} x^2 \theta$, 由弧长公式得 \widehat{BC}

的长度为 $x\theta$ m,

\widehat{AD} 的长度为 $2x\theta$ m, 而园圃的外围周长

为 50 m, 故 $x\theta + 2x\theta + x + x = 50$, 解得

$$\theta = \frac{50-2x}{3x},$$

因为圆心角 θ 小于 π , 所以 $0 < \frac{50-2x}{3x} < \pi$,

解得 $\frac{50}{3\pi+2} < x < 25$, 而 $x \in (0, 10]$, 故 $x \in$

$\left(\frac{50}{3\pi+2}, 10\right]$, 故 $y = \frac{3}{2} x^2 \times \frac{50-2x}{3x} =$

$25x - x^2$, 该函数的定义域为 $\left(\frac{50}{3\pi+2}, 10\right]$.

(2) 由二次函数性质得 y 在

$\left(\frac{50}{3\pi+2}, 10\right]$ 内单调递增, 当 $x = 10$ 时, y

的最大值为 $y = 25 \times 10 - 10^2 = 150$, \widehat{AD} 的

长度为 $2x \times \frac{50-2x}{3x} = \frac{2(50-2 \times 10)}{3} =$

20 (m), \widehat{BC} 的长度为 $x \times \frac{50-2x}{3x} =$

$\frac{50-2 \times 10}{3} = 10$ (m).

5.2 三角函数的概念

5.2.1 三角函数的概念



对点上分

1. B



攻略上分

已知角终边上一点的坐标即可求出它的三角函数值, 具体可见“通法攻略 41: 手算任意角的三角函数值”.

【解析】因为角 α 终边上有一点 $P(-8,$



$$6), \text{ 所以 } \sin \alpha = \frac{6}{\sqrt{(-8)^2+6^2}} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}.$$

故选 B.

2. A 【解析】由三角函数定义可知

$$Q\left(\cos \frac{2\pi}{3}, \sin \frac{2\pi}{3}\right), \text{ 所以 } Q\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

故选 A.

3. C 【解析】由题意可知点 P 与原点的距

$$\text{离 } r = \sqrt{2+m^2}, \text{ 且 } m < 0, \text{ 则 } \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{r} =$$

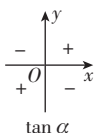
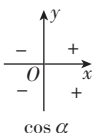
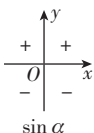
$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2+m^2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}, \text{ 解得 } m = -\sqrt{14}. \text{ 故选 C.}$$

4. D 【解析】因为 $f(x) = \log_a(x+2) + 2$ 的图象经过定点 P, 所以点 P 的坐标为 $(-1, 2)$, 故 $\tan \theta = -2$, 故选 D.

5. A 【解析】当 θ 为锐角时, $\sin \theta > 0$ 且 $\cos \theta > 0$; 当 $\sin \theta > 0$ 且 $\cos \theta < 0$ 时, θ 为第二象限角, 此时 θ 不一定为锐角, 所以 p 是 q 的充分不必要条件. 故选 A.

方法总结 三角函数值在各象限的符号

口诀概括为: 一全正、二正弦、三正切、四余弦(如图).



6. B 【解析】当 $\alpha = \frac{7\pi}{6}$ 时, 满足 α 是第三象

限角, 但 $\cos 2\alpha = \cos \frac{7\pi}{3} = \cos \frac{\pi}{3} > 0$, 故 A 错误;

对于 BCD, $\pi + 2k\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$,

则 $\frac{\pi}{2} + k\pi < \frac{\alpha}{2} < \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 即 $\frac{\alpha}{2}$ 是第

二象限角或第四象限角, 所以 $\tan \frac{\alpha}{2}$ 符

合题意. 故 B 正确.

7. A 【解析】因为 $\frac{\pi}{2} < 2 < 3 < \pi < 4 < \frac{3\pi}{2}$, 所以

$\sin 2 > 0, \cos 3 < 0, \tan 4 > 0$, 所以 $\sin 2 \cos 3 \tan 4 < 0$. 故选 A.

8. BC 【解析】若 $a < 0$, 则角 θ 的终边在第四象限, 显然 A 错误;

$$\tan \theta = \frac{4a}{-3a} = -\frac{4}{3}, \text{ 故 B 正确;}$$



当 $a > 0$ 时, 点 $(-3a, 4a)$ 与原点的距离

$$r = \sqrt{(-3a)^2 + (4a)^2} = 5|a| = 5a, \text{ 所以}$$

$$\sin \theta + \cos \theta = \frac{4a}{5a} + \frac{-3a}{5a} = \frac{1}{5}, \text{ 所以 C 正确;}$$

$$\text{因为 } \sin \theta \cdot \cos \theta = \frac{4a}{r} \cdot \frac{-3a}{r} = \frac{-12a^2}{r^2} =$$

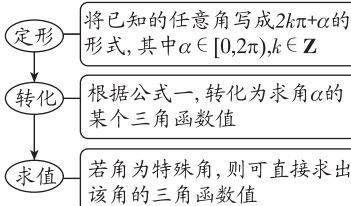
$$\frac{-12a^2}{25a^2} = -\frac{12}{25}, \text{ 与 } a \text{ 的正负无关, 所以 D}$$

错误. 故选 BC.

9. B 【解析】 $\sin\left(-\frac{17\pi}{6}\right) = \sin\left(-\frac{17\pi}{6} + 4\pi\right) = \sin\frac{7\pi}{6} = -\frac{1}{2}.$

10. $\frac{\sqrt{6}+1}{4}$ 【解析】 $\sin(-1395^\circ)\cos 1110^\circ + \cos(-1020^\circ)\sin 750^\circ$
 $= \sin(-1440^\circ + 45^\circ)\cos(1080^\circ + 30^\circ) + \cos(-1080^\circ + 60^\circ)\sin(720^\circ + 30^\circ)$
 $= \sin 45^\circ\cos 30^\circ + \cos 60^\circ\sin 30^\circ$
 $= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+1}{4}.$

方法总结 利用公式一求解任意角的三角函数值的步骤



11. 【解】 \because 角 α 的终边经过点 $P(x, 4)$,

$$\text{且 } \cos(\alpha + 2022\pi) = \cos \alpha = \frac{x}{5},$$

$$\therefore \cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 16}} = \frac{x}{5}, \text{ 解得 } x = 0 \text{ 或 } x =$$

$$3 \text{ 或 } x = -3, \therefore P(0, 4) \text{ 或 } P(\pm 3, 4),$$

$$\therefore \sin \alpha = 1 \text{ 或 } \frac{4}{5}.$$

5.2.2 同角三角函数的基本关系



对点上分

1. B 【解析】由 $\sin x = 1$, 得 $\cos x = 0$, 反之, 若 $\cos x = 0$, 则 $\sin x = 1$ 或 $\sin x = -1$, 所以“ $\cos x = 0$ ”是“ $\sin x = 1$ ”的必要不充分条件. 故选 B.

2. D 【解析】因为 $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$, 且 α 是第

$$\text{三象限角, 所以 } \sin \alpha = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} =$$



$-\frac{\sqrt{5}}{3}$. 故选 D.

3. A 【解析】因为 $\frac{\sin \theta}{1-\cos \theta}=2$, 所以 $\sin \theta=2(1-\cos \theta)$, 且 $\cos \theta \neq 1$, 联立方程

$$\begin{cases} \sin \theta=2(1-\cos \theta), \\ \sin^2 \theta+\cos^2 \theta=1, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} \sin \theta=\frac{4}{5}, \\ \cos \theta=\frac{3}{5} \end{cases} \text{ 或}$$

$$\begin{cases} \sin \theta=0, \\ \cos \theta=1 \end{cases} \text{ (舍去), 所以 } \begin{cases} \sin \theta=\frac{4}{5}, \\ \cos \theta=\frac{3}{5}. \end{cases} \text{ 故}$$

选 A.

易错警示 忽略题目中的隐含条件致错

注意本题中, $\frac{\sin \theta}{1-\cos \theta}=2$ 的分母不能为 0, 因此 $\cos \theta$ 不能等于 1, 本题易错选 C.

4. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 【解析】因为 $\frac{\cos \alpha}{1+\sin \alpha} \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha-1} =$

$$\frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha-1} = \frac{1-\sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha-1} = -1, \text{ 且 } \frac{\cos \alpha}{1+\sin \alpha} = -\sqrt{3},$$

$$\text{所以 } \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha-1} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

5. B 【解析】因为 $\begin{cases} \sin \alpha+\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha=1, \\ \sin^2 \alpha+\cos^2 \alpha=1, \end{cases}$

且角 α 的终边不在 y 轴上, 解得

$$\begin{cases} \sin \alpha=\frac{1}{3}, \\ \cos \alpha=\frac{2\sqrt{2}}{3}, \end{cases} \text{ 则 } \tan \alpha=\frac{\sqrt{2}}{4}. \text{ 故选 B.}$$

6. 1



攻略上分

对于齐次式的求值, 可利用同角三角函数的基本关系, 将弦的齐次式化成正切形式即可求值, 具体可参考“通法攻略 42: 弦化切求齐次式的值”.

$$\text{【解析】} \frac{\sin^2 \theta+2 \cos^2 \theta}{3 \sin \theta \cos \theta} = \frac{\tan^2 \theta+2}{3 \tan \theta} = \frac{2^2+2}{3 \times 2} = 1.$$

7. $\frac{7}{5}$ 【解析】方法一: 因为角 α 的终边落在射线 $y=2x(x \geqslant 0)$ 上, 所以不妨设角 α 的终边过点 $P(1,2)$, 则 $|OP|=\sqrt{5}(O$ 为



坐标原点),

所以 $\sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}, \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$, 所以 $2 \sin^2 \alpha -$

$$\cos^2 \alpha = 2 \times \left(\frac{2}{\sqrt{5}} \right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \right)^2 = \frac{7}{5}.$$

方法二: 由题易知 $\tan \alpha = 2$, 所以

$$2 \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = \frac{2 \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} =$$

$$\frac{2 \tan^2 \alpha - 1}{\tan^2 \alpha + 1} = \frac{7}{5}.$$

8. C 【解析】因为 $\alpha \in (0, \pi)$, 所以 $\sin \alpha >$

0, 因为 $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 所以等式两边

平方可得 $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 1 +$

$2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{3}{4}$, 可得 $2 \sin \alpha \cos \alpha = -\frac{1}{4}$,

则 $\cos \alpha < 0$, 所以 $\sin \alpha - \cos \alpha > 0$, 因

为 $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 1 - 2 \sin \alpha \cos \alpha = 1 +$

$\frac{1}{4} = \frac{5}{4}$, 所以 $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$. 故选 C.

9. C 【解析】因为关于 x 的一元二次方

程 $x^2 - \frac{1}{5}x + m = 0$ 的两根分别为

$\sin \alpha, \cos \alpha$,

所以 $\Delta = \frac{1}{25} - 4m > 0$, 可得 $m < \frac{1}{100}$, 由根与

系数的关系可得 $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{5}$,

$\sin \alpha \cdot \cos \alpha = m$,

所以 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{1}{25}$, 解

得 $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = -\frac{12}{25}$, 即 $m = -\frac{12}{25}$. 故

选 C.

10. D 【解析】 $\because \alpha \in \left(\frac{3\pi}{4}, \pi \right)$,

$\therefore \sin \alpha > 0, \cos \alpha < 0$, 且 $|\sin \alpha| < |\cos \alpha|$,

$\therefore \sin \alpha + \cos \alpha < 0, \sin \alpha - \cos \alpha > 0$,

$\therefore \sqrt{1 - 2 \sin \alpha \cos \alpha} + \sqrt{1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha}$

$= \sqrt{(\sin \alpha - \cos \alpha)^2} + \sqrt{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2}$

$= |\sin \alpha - \cos \alpha| + |\sin \alpha + \cos \alpha|$

$= \sin \alpha - \cos \alpha - \sin \alpha - \cos \alpha$

$= -2 \cos \alpha$.

故选 D.

11. A 【解析】 $\because (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 1 +$

$2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{5}{4}$, $\therefore 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{4}$,



$\therefore (\cos \alpha - \sin \alpha)^2 = 1 - 2 \sin \alpha \cos \alpha = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, 又 $\because \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$, $\therefore 0 < \sin \alpha < \cos \alpha$, $\therefore \cos \alpha - \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (负值舍去), $\therefore \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = (\cos \alpha + \sin \alpha)(\cos \alpha - \sin \alpha) = \frac{\sqrt{15}}{4}$. 故选 A.

12. AD 【解析】由 $\theta \in (0, \pi)$, $\sin \theta - \cos \theta = \frac{7}{5} > 1$, 得 $\sin \theta > 0$, $\cos \theta < 0$, 则 $\theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, 故 A 正确;

由 $\sin \theta - \cos \theta = \frac{7}{5}$, 两边平方可得, $1 - 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{49}{25}$, 则 $2 \sin \theta \cos \theta = -\frac{24}{25}$,

则 $\sin \theta + \cos \theta = \pm \sqrt{(\sin \theta + \cos \theta)^2} = \pm \sqrt{1 + 2 \sin \theta \cos \theta} = \pm \sqrt{1 - \frac{24}{25}} = \pm \frac{1}{5}$,

当 $\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{5}$ 时, 联立

$$\begin{cases} \sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{5}, \\ \sin \theta - \cos \theta = \frac{7}{5}, \end{cases} \text{解得 } \sin \theta = \frac{4}{5},$$

$\cos \theta = -\frac{3}{5}$, 则 $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = -\frac{4}{3}$,

当 $\sin \theta + \cos \theta = -\frac{1}{5}$ 时, 联立

$$\begin{cases} \sin \theta + \cos \theta = -\frac{1}{5}, \\ \sin \theta - \cos \theta = \frac{7}{5}, \end{cases} \text{解得 } \sin \theta =$$

$\frac{3}{5}$, $\cos \theta = -\frac{4}{5}$, 则 $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = -\frac{3}{4}$,

故 B, C 错误;

由 $2 \sin \theta \cos \theta = -\frac{24}{25}$, 得 $\frac{\tan \theta}{1 + \tan^2 \theta} =$

$\sin \theta \cos \theta = -\frac{12}{25}$, 故 D 正确. 故选 AD.

13. 【解】(1) 方法一: $f(\alpha) = \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha}$, 因

为 $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 所以 $(\sin \alpha +$

$\cos \alpha)^2 = \frac{1}{2}$, 即 $2 \sin \alpha \cos \alpha = -\frac{1}{2}$,

从而 $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 1 - 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{3}{2}$,



因为 $0 < \alpha < \pi$, 所以 $\sin \alpha > 0$, 又因为 $\sin \alpha \cos \alpha < 0$, 所以 $\cos \alpha < 0$, 因此 $\sin \alpha - \cos \alpha > 0$,

则 $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{\sqrt{6}}{2}$, 故 $f(\alpha) =$

$$\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

方法二: 由 $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 及 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$,

解得 $\sin \alpha = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$ 或

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}, \cos \alpha = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4},$$

因为 $0 < \alpha < \pi$, 所以 $\sin \alpha = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$,

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4},$$

所以 $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{\sqrt{6}}{2}$, 因此 $f(\alpha) =$

$$\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

(2) 方法一: 因为 $f(\alpha) = \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} =$

$$\frac{1}{3}, \text{ 所以 } 2\sin \alpha = -4\cos \alpha,$$

假设 $\cos \alpha = 0$, 则由上式知 $\sin \alpha = 0$, 与 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ 矛盾, 所以 $\cos \alpha \neq 0$, 则 $\tan \alpha = -2$.

$$\text{则 } \sin^2 \alpha - 3\sin \alpha \cos \alpha = \frac{\sin^2 \alpha - 3\sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} =$$

$$\frac{\tan^2 \alpha - 3\tan \alpha}{\tan^2 \alpha + 1} = 2.$$

方法二: 因为 $f(\alpha) = \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} = \frac{1}{3}$,

所以 $\sin \alpha = -2\cos \alpha$,

又 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, 所以 $5\cos^2 \alpha = 1$, 即

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{5},$$

因此 $\sin^2 \alpha - 3\sin \alpha \cos \alpha = 4\cos^2 \alpha + 6\cos^2 \alpha = 10\cos^2 \alpha = 2$.

14. D 【解析】 $\frac{\cos \alpha}{\sin^3 \alpha + \sin \alpha \cos^2 \alpha + \cos \alpha}$

$$= \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + \cos \alpha}$$

$$= \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{1}{\tan \alpha + 1}$$



$$= \frac{1}{\frac{1}{4} + 1} = \frac{4}{5}. \text{ 故选 D.}$$

15. $\frac{2}{3}$ 【解析】原式

$$\begin{aligned} &= \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha - \cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha}{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha - \cos^6 \alpha - \sin^6 \alpha} \\ &= \frac{\cos^2 \alpha (1 - \cos^2 \alpha) + \sin^2 \alpha (1 - \sin^2 \alpha)}{\cos^2 \alpha (1 - \cos^4 \alpha) + \sin^2 \alpha (1 - \sin^4 \alpha)} \\ &= \frac{2 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha (1 - \cos^2 \alpha) (1 + \cos^2 \alpha) + \sin^2 \alpha (1 - \sin^2 \alpha) (1 + \sin^2 \alpha)} \\ &= \frac{2 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha \sin^2 \alpha (1 + \cos^2 \alpha) + \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha (1 + \sin^2 \alpha)} \\ &= \frac{2}{1 + \cos^2 \alpha + 1 + \sin^2 \alpha} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

16. 攻略上分 利用同角三角函数的基本关系进行证明, 具体可见“通法攻略 43: ‘八法’ 破解三角恒等式的证明”.

【证明】左边 $= \sin \alpha \left(1 + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \right) + \cos \alpha \cdot$

$$\left(1 + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \right) = \sin \alpha + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} + \cos \alpha + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha} =$$

$$\frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1}{\cos \alpha} + \frac{1}{\sin \alpha} =$$

右边.

即原等式成立.

17. 【解】(1) $\because 3 \sin^2 \theta - 5 \sin \theta \cos \theta - 2 \cos^2 \theta$

$$= \frac{3 \sin^2 \theta - 5 \sin \theta \cos \theta - 2 \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}$$

$$= \frac{3 \tan^2 \theta - 5 \tan \theta - 2}{\tan^2 \theta + 1} = 0,$$

$$\therefore 3 \tan^2 \theta - 5 \tan \theta - 2 = (3 \tan \theta + 1) \cdot$$

$$(\tan \theta - 2) = 0, \text{ 解得 } \tan \theta = -\frac{1}{3} \text{ 或}$$

$$\tan \theta = 2.$$

$$(2) \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{1 - \cos \theta}} + \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1 + \cos \theta)^2}{(1 - \cos \theta)(1 + \cos \theta)}} +$$

$$\sqrt{\frac{(1 - \cos \theta)^2}{(1 + \cos \theta)(1 - \cos \theta)}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1 + \cos \theta)^2}{\sin^2 \theta}} + \sqrt{\frac{(1 - \cos \theta)^2}{\sin^2 \theta}}$$

$$= \frac{1 + \cos \theta}{|\sin \theta|} + \frac{1 - \cos \theta}{|\sin \theta|},$$



$\because \theta$ 是第一象限角, $\therefore \sin \theta > 0, \tan \theta > 0$,
由 (1) 可知 $\tan \theta = 2$,

$$\therefore \begin{cases} \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = 2, \\ \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1, \end{cases} \quad \text{解得 } \sin \theta = \frac{2\sqrt{5}}{5},$$

$$\therefore \sqrt{\frac{1+\cos \theta}{1-\cos \theta}} + \sqrt{\frac{1-\cos \theta}{1+\cos \theta}} = \frac{1+\cos \theta}{\sin \theta} + \frac{1-\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{2}{\sin \theta} = \frac{2}{\frac{2\sqrt{5}}{5}} = \sqrt{5}.$$

18. C 【解析】由 $\sin A + 3\cos A = -\sqrt{2}$, 可得

$$\sin A = -\sqrt{2} - 3\cos A, \text{ 所以 } (-\sqrt{2} - 3\cos A)^2 + \cos^2 A = 1, \text{ 整理可得 } 10\cos^2 A + 6\sqrt{2}\cos A + 1 = 0, \text{ 解得 } \cos A = -\frac{\sqrt{2}}{10} \text{ 或 } -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

因为 A 是 $\triangle ABC$ 的内角, 所以 $\sin A > 0$.

$$\text{当 } \cos A = -\frac{\sqrt{2}}{10} \text{ 时, } \sin A = -\sqrt{2} - 3 \times$$

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{10}\right) = -\frac{7\sqrt{2}}{10} \text{ (舍去);}$$

$$\text{当 } \cos A = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ 时, } \sin A = -\sqrt{2} - 3 \times$$

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ 所以 } \tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = -1. \text{ 故}$$

选 C.

易错警示

本题中需注意, A 为三角形的内角, 所以 $\sin A > 0$, 注意题目中的隐含条件.

19. D 【解析】过点 O 作 $OD \perp AB$ (图略),

$$\text{则 } \angle AOD = \angle BOD = \alpha,$$

根据题意可设半径长 $OB = r > 0$, 可

$$\text{得 } \cos \alpha = \frac{r-1}{r}, \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{r},$$

由同角三角函数的基本关系可得

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = \left(\frac{r-1}{r}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{r}\right)^2 = 1, \text{ 解得}$$

$$r = 2,$$

$$\text{即可得 } \cos \alpha = \frac{1}{2}, \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}, \tan \alpha =$$

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \sqrt{3}.$$

$$\text{所以 } \frac{1}{2\sin \alpha \cdot \cos \alpha} + \tan \alpha = \frac{1}{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2}} +$$

$$\sqrt{3} = \frac{5\sqrt{3}}{3}. \text{ 故选 D.}$$

20. 【解】 (1) 因为 $\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{5}$, 所以

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta + 2\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{25}, \text{ 即 } 1 +$$

$$2\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{25}, \text{ 所以 } \sin \theta \cos \theta = -\frac{12}{25}.$$

由 θ 是 $\triangle ABC$ 的一个内角, 得 $0 < \theta < \pi$,
则 $\sin \theta > 0$, 而 $\sin \theta \cos \theta < 0$, 则 $\cos \theta < 0$,

有 $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$, 所以 $\triangle ABC$ 是钝角三角形.

(2) 由 (1) 知, $\sin \theta > 0 > \cos \theta$,

$$\sin \theta \cos \theta = -\frac{12}{25}, \text{ 所以}$$

$$\sin \theta - \cos \theta = \sqrt{(\sin \theta - \cos \theta)^2} =$$

$$\sqrt{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta - 2\sin \theta \cos \theta} =$$

$$\sqrt{1 - 2 \times \left(-\frac{12}{25}\right)} = \frac{7}{5}.$$

5.2 节测上分

1. B 【解析】 因为 $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$, 所以 $\cos \theta < 0$,

$\tan \theta > 0$, 所以点 $M(\cos \theta, \tan \theta)$ 位于第二象限.

2. C 【解析】 因为 $\frac{1 + \sin \alpha - \cos \alpha}{1 + \sin \alpha + \cos \alpha} = 2$, 所以

$$1 + \sin \alpha - \cos \alpha = 2(1 + \sin \alpha + \cos \alpha),$$

所以 $\sin \alpha = -1 - 3\cos \alpha$, 等号两边分别平方得 $\sin^2 \alpha = (1 + 3\cos \alpha)^2$, 化简得 $1 - \cos^2 \alpha = 9\cos^2 \alpha + 6\cos \alpha + 1$, 计算得 $(5\cos \alpha + 3) \times 2\cos \alpha = 0$, 所以 $\cos \alpha = 0$

或 $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$, 又因为 α 为钝角, 所

$$\text{以 } \cos \alpha = -\frac{3}{5}.$$

故选 C.

3. C 【解析】 设大正方形的边长为 a , 则直角三角形的直角边长分别为 $a\sin \alpha$, $a\cos \alpha$, $\because \alpha$ 为直角三角形较小的锐角, $\therefore 0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$, $S_1 = a^2$, $S_2 = S_1 - 4 \times$

$$\frac{1}{2}a\sin \alpha \cdot a\cos \alpha = a^2 - 2a^2\sin \alpha \cos \alpha, \text{ 则}$$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{a^2}{a^2 - 2a^2\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{1}{1 - 2\sin \alpha \cos \alpha} =$$

$$25, \text{ 即 } \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2\sin \alpha \cos \alpha} = 25,$$



$$\therefore \frac{\tan^2 \alpha + 1}{\tan^2 \alpha + 1 - 2 \tan \alpha} = 25, \text{ 解得 } \tan \alpha = \frac{3}{4} \text{ 或}$$

$$\tan \alpha = \frac{4}{3} \text{ (不合题意, 舍去),}$$

$$\therefore \frac{3 \sin \alpha + \cos \alpha}{2 \sin \alpha - \cos \alpha} = \frac{3 \tan \alpha + 1}{2 \tan \alpha - 1} = \frac{3 \times \frac{3}{4} + 1}{2 \times \frac{3}{4} - 1} =$$

$$\frac{13}{2}. \text{ 故选 C.}$$

4. B 【解析】因为 $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 所以

$$\cos \theta \in (0, 1), \sin \theta \in (0, 1),$$

$$\text{因为 } 2k \sin^2 \theta \cos^2 \theta = \sin^2 \theta + 9 \cos^2 \theta,$$

$$\text{所以 } k = \frac{\sin^2 \theta + 9 \cos^2 \theta}{2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta} =$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\cos^2 \theta} + \frac{9}{\sin^2 \theta} \right)$$

$$= \frac{1}{2} (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \left(\frac{1}{\cos^2 \theta} + \frac{9}{\sin^2 \theta} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(10 + \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} + \frac{9 \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} \right) \geq \frac{1}{2} \times (10 +$$

$$2\sqrt{9}) = 8, \text{ 当且仅当 } \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{9 \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta}, \text{ 即 } \theta =$$

$$\frac{\pi}{3} \text{ 时, 等号成立, 所以 } k \text{ 的最小值是 } 8.$$

故选 B.

5. ABC 【解析】对 A: 因为 $\sin \theta + \cos \theta =$

$$\frac{7}{17}, \text{ 则 } (\sin \theta + \cos \theta)^2 = 1 + 2 \sin \theta \cos \theta =$$

$$\frac{49}{289}, \text{ 所以 } 2 \sin \theta \cos \theta = -\frac{240}{289}, \text{ 又因为}$$

$$\theta \in (0, \pi), \text{ 则 } \sin \theta > 0, \cos \theta < 0, \text{ 所以 } \theta \in$$

$$\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right), \text{ 所以以 } \theta \text{ 为内角的三角形为钝}$$

角三角形, 故 A 正确;

$$\text{对 D: 可得 } (\sin \theta - \cos \theta)^2 = 1 - 2 \sin \theta \cdot$$

$$\cos \theta = \frac{529}{289}, \text{ 且 } \sin \theta - \cos \theta > 0, \text{ 所以}$$

$$\sin \theta - \cos \theta = \frac{23}{17}, \text{ 故 D 错误;}$$

$$\text{对 B: 联立 } \begin{cases} \sin \theta + \cos \theta = \frac{7}{17}, \\ \sin \theta - \cos \theta = \frac{23}{17}, \end{cases} \text{ 可得 } \sin \theta =$$

$$\frac{15}{17}, \cos \theta = -\frac{8}{17}, \text{ 故 B 正确;}$$

$$\text{对 C: 易知 } \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = -\frac{15}{8}, \text{ 故 C 正确.}$$

故选 ABC.

6. $-\sin \alpha$ 【解析】

$$\begin{aligned} & \frac{\sin(\alpha - 2025\pi) \cos\left(\frac{9}{2}\pi - \alpha\right)}{\cos(2024\pi - \alpha) \tan(\pi + \alpha)} \\ &= \frac{\sin(\alpha + \pi) \cos\left(\frac{1}{2}\pi - \alpha\right)}{\cos(-\alpha) \tan \alpha} \\ &= \frac{-\sin \alpha \sin \alpha}{\cos \alpha \tan \alpha} = \frac{-\sin \alpha \sin \alpha}{\cos \alpha \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}} = -\sin \alpha. \end{aligned}$$

7. 1 【解析】因为 $\tan \alpha = 2$,

$$\begin{aligned} & \text{所以 } 4\sin^2 \alpha - 3\sin \alpha \cos \alpha - 5\cos^2 \alpha \\ &= \frac{4\sin^2 \alpha - 3\sin \alpha \cos \alpha - 5\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} \\ &= \frac{4\tan^2 \alpha - 3\tan \alpha - 5}{\tan^2 \alpha + 1} \\ &= \frac{4 \times 2^2 - 3 \times 2 - 5}{2^2 + 1} = 1. \end{aligned}$$

一题多解

因为 $\tan \alpha = 2$, 所以 $\sin \alpha = 2\cos \alpha$, 且 $\cos \alpha \neq 0$,

$$\begin{aligned} & \text{所以 } 4\sin^2 \alpha - 3\sin \alpha \cos \alpha - 5\cos^2 \alpha \\ &= \frac{4\sin^2 \alpha - 3\sin \alpha \cos \alpha - 5\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} \\ &= \frac{16\cos^2 \alpha - 6\cos^2 \alpha - 5\cos^2 \alpha}{4\cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha} \\ &= \frac{16 - 6 - 5}{5} = 1. \end{aligned}$$

8. $\frac{41}{50}$ 【解析】 $\because \frac{1+\tan \theta}{1-\tan \theta} = \frac{1}{2}, \therefore \tan \theta =$

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{3}, \sin \theta \cos \theta = \frac{\sin \theta \cos \theta}{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta} = \frac{\tan \theta}{1 + \tan^2 \theta} \\ &= \frac{1}{\frac{10}{9}} = -\frac{3}{10}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin^4 \theta + \cos^4 \theta &= (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)^2 - 2\sin^2 \theta \cos^2 \theta \\ &= 1 - 2 \times \frac{9}{100} = \frac{41}{50}. \end{aligned}$$

9. $\frac{47}{135}$ 【解析】由 $\frac{\sin \theta - 2\cos \theta}{\sin \theta + \cos \theta} = 2$ 可得

$$\sin \theta = -4\cos \theta, \text{ 即 } \tan \theta = -4,$$

$$\begin{aligned} & \text{所以 } \frac{\sin^3 \theta + \cos \theta}{2\sin \theta + \cos^3 \theta} \\ &= \frac{(-4\cos \theta)^3 + \cos \theta}{2 \times (-4\cos \theta) + \cos^3 \theta} \\ &= \frac{-64\cos^3 \theta + \cos \theta}{-8\cos \theta + \cos^3 \theta} \\ &= \frac{-64\cos^2 \theta + 1}{-8 + \cos^2 \theta} \end{aligned}$$



$$= \frac{-64\cos^2\theta + \sin^2\theta + \cos^2\theta}{-8(\sin^2\theta + \cos^2\theta) + \cos^2\theta}$$

$$= \frac{-63\cos^2\theta + \sin^2\theta}{-8\sin^2\theta - 7\cos^2\theta}$$

$$= \frac{-63 + \tan^2\theta}{-8\tan^2\theta - 7},$$

$$= \frac{-63 + 16}{-8 \times 16 - 7} = \frac{47}{135}.$$

10. 【解】(1) 因为 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$ 是方程的两

$$\text{个根, 所以} \begin{cases} \sin\theta + \cos\theta = \frac{\sqrt{3}+1}{2}, \\ \sin\theta \cos\theta = \frac{m}{4}, \\ 4(\sqrt{3}+1)^2 - 16m > 0, \end{cases}$$

$$\text{原式} = \frac{\sin^2\theta}{\sin\theta - \cos\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\cos\theta - \sin\theta} =$$

$$\frac{\sin^2\theta - \cos^2\theta}{\sin\theta - \cos\theta} = \sin\theta + \cos\theta = \frac{\sqrt{3}+1}{2}.$$

$$(2) \text{ 因为 } \sin\theta + \cos\theta = \frac{\sqrt{3}+1}{2},$$

$$\text{所以 } (\sin\theta + \cos\theta)^2 = 1 + 2\sin\theta \cos\theta =$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)^2, \text{ 所以 } 1 + 2 \times \frac{m}{4} = \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)^2, \text{ 解}$$

$$\text{得 } m = \sqrt{3}.$$

$$(3) \text{ 由 } (2) \text{ 可知, } m = \sqrt{3}, \text{ 所以方程为}$$

$$4x^2 - 2(\sqrt{3}+1)x + \sqrt{3} = 0, \text{ 解得 } x_1 =$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}, x_2 = \frac{1}{2},$$

$$\text{所以} \begin{cases} \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \cos\theta = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} \sin\theta = \frac{1}{2}, \\ \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}, \end{cases}$$

$$\text{又因为 } \theta \in (-2\pi, 0), \text{ 所以 } \theta = -\frac{5\pi}{3} \text{ 或}$$

$$\theta = -\frac{11\pi}{6}.$$

5.3 诱导公式



对点上分

1. D 【解析】 $\cos 330^\circ + \tan 600^\circ$

$$= \cos(360^\circ - 30^\circ) + \tan(360^\circ + 180^\circ + 60^\circ)$$

$$= \cos(-30^\circ) + \tan(180^\circ + 60^\circ)$$

$$= \cos 30^\circ + \tan 60^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}, \text{ 故选 D.}$$

2. A 【解析】因为角 α 的终边过点 $P(1,$



$$-\sqrt{2}), \text{ 所以 } \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1^2 + (-\sqrt{2})^2}} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\text{所以 } \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}. \text{ 故选 A.}$$

3. B 【解析】因为 $\sin(\theta + \pi) < 0$, 所以 $-\sin \theta < 0$, 即 $\sin \theta > 0$; 又因为 $\cos(\theta - \pi) > 0$, 所以 $-\cos \theta > 0$, 即 $\cos \theta < 0$. 故选 B.

4. B 【解析】 $\because \cos(2\pi - \alpha) = \cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}, \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right), \therefore \sin \alpha = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = -\frac{2}{3},$
 $\therefore \sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha = -\frac{2}{3}$. 故选 B.

5. B 【解析】因为 $\sin\left(2x - \frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, 所以 $\cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left[\left(2x - \frac{5\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{2}\right] = -\sin\left(2x - \frac{5\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$. 故选 B.

6. -3 【解析】由 $\tan \alpha = 2$, 得

$$\frac{\sin(\pi + \alpha) - \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) + \cos(\pi - \alpha)} = \frac{-\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} = -\frac{\tan \alpha + 1}{\tan \alpha - 1} = -\frac{2 + 1}{2 - 1} = -3.$$

7. $\frac{12}{13}$ 【解析】因为 $\cos(508^\circ - \alpha) =$

$$\cos(360^\circ + 148^\circ - \alpha) = \cos(148^\circ - \alpha) = \frac{12}{13},$$

$$\text{所以 } \cos(212^\circ + \alpha) = \cos(360^\circ + \alpha - 148^\circ) = \cos(\alpha - 148^\circ) = \cos(148^\circ - \alpha) = \frac{12}{13}.$$

易错警示

不能确定角之间的特殊关系导致诱导公式应用失误

本题中角的特殊关系不易发现, 需先化简再构造. 总之, 解决给值求值问题, 首先要探寻条件角与问题角之间的关系, 便于直接利用诱导公式整体求解.

8. $\frac{11}{9}$ 【解析】令 $t = x + \frac{\pi}{3}$, 则 $x = t - \frac{\pi}{3}$,

$$\sin t = \frac{1}{3}, \text{ 则 } \sin\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{6} - x\right) =$$



$$\sin(\pi - t) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin t + \cos^2 t =$$

$$\frac{1}{3} + \left(1 - \frac{1}{9}\right) = \frac{11}{9}.$$

9. 【解】(1) 由 $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ 可得 $\sin \beta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$,

$$\text{则 } 3\sin \alpha - \cos \alpha = \sqrt{10}, \text{ 即 } 9\sin^2 \alpha - 6\sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha = 10,$$

$$\text{其中 } \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \text{ 则 } 9\sin^2 \alpha - 6\sin \alpha \cos \alpha + 1 - \sin^2 \alpha = 10,$$

$$\text{整理可得 } 8\sin^2 \alpha - 6\sin \alpha \cos \alpha - 9 = 0,$$

$$\text{因为 } \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \text{ 即 } \cos \alpha = \frac{\sin \alpha}{\tan \alpha},$$

$$\text{所以 } 8\sin^2 \alpha - 6 \frac{\sin^2 \alpha}{\tan \alpha} - 9 = 0,$$

$$\text{由 } \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \text{ 得 } \tan^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \text{ 即}$$

$$\tan^2 \alpha + 1 = \frac{1}{1 - \sin^2 \alpha}, \text{ 即 } \sin^2 \alpha = \frac{\tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha},$$

$$\text{代入上式得 } 8 \times \frac{\tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} - 6 \times \frac{\tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} - 9 =$$

$$0, \text{ 化简得 } \tan^2 \alpha + 6\tan \alpha + 9 = 0, \text{ 即 } (\tan \alpha + 3)^2 = 0, \text{ 解得 } \tan \alpha = -3.$$

$$(2) \text{ 原式} = \frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{-\sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{1 + \tan \alpha}{-\tan \alpha + 1} =$$

$$\frac{1 - 3}{3 + 1} = -\frac{1}{2}.$$

10. B 【解析】 $\tan(\pi + 1) = \tan 1$, 故 A 错误;

$$\frac{\sin(-\alpha)}{\tan(360^\circ - \alpha)} = \frac{-\sin \alpha}{-\tan \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}} = \cos \alpha,$$

故 B 正确;

$$\frac{\sin(\pi - \alpha)}{\cos(\pi + \alpha)} = \frac{\sin \alpha}{-\cos \alpha} = -\tan \alpha, \text{ 故 C 错误;}$$

$$\frac{\cos(\pi - \alpha) \tan(-\pi - \alpha)}{\sin(2\pi - \alpha)}$$

$$= \frac{(-\cos \alpha)(-\tan \alpha)}{-\sin \alpha}$$

$$= -\frac{\cos \alpha \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}{\sin \alpha} = -1, \text{ 故 D 错误.}$$

11. B 【解析】因为 $f(\alpha) =$

$$\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)}{\cos(-\pi - \alpha) \tan(\pi - \alpha)} =$$

$$\frac{-\sin \alpha \cdot (-\cos \alpha)}{-\cos \alpha \cdot (-\tan \alpha)} = \cos \alpha,$$



$$\begin{aligned} \text{所以 } f\left(-\frac{2\,024}{3}\pi\right) &= \cos\left(-\frac{2\,024\pi}{3}\right) = \\ \cos\frac{2\,024\pi}{3} &= \cos\left(675\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \\ -\cos\frac{\pi}{3} &= -\frac{1}{2}. \text{ 故选 B.} \end{aligned}$$

12. B 【解析】当 k 为偶数时, 设 $k = 2n$, $n \in \mathbf{Z}$, 则原式

$$\begin{aligned} &= \frac{\sin[(2n+1)\pi+\theta] \cdot \cos[(2n+1)\pi-\theta]}{\sin(2n\pi-\theta) \cdot \cos(2n\pi+\theta)} \\ &= \frac{\sin(\pi+\theta) \cdot \cos(\pi-\theta)}{-\sin\theta \cdot \cos\theta} \\ &= \frac{-\sin\theta \cdot (-\cos\theta)}{-\sin\theta \cdot \cos\theta} = -1. \end{aligned}$$

当 k 为奇数时, 设 $k = 2n+1$, $n \in \mathbf{Z}$, 则原式

$$\begin{aligned} &= \frac{\sin[(2n+2)\pi+\theta] \cdot \cos[(2n+2)\pi-\theta]}{\sin[(2n+1)\pi-\theta] \cdot \cos[(2n+1)\pi+\theta]} \\ &= \frac{\sin\theta \cdot \cos\theta}{\sin\theta \cdot (-\cos\theta)} = -1. \end{aligned}$$

综上, 原式的值为 -1 . 故选 B.

易错警示

忽略对 $k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$) 中系数 k 的分类讨论

不能对整数 k 进行“奇数与偶数”的分类讨论, 或者讨论后不能正确地利用诱导公式是出现错误的主要原因.

13. ABC 【解析】 $\sin(A+B) = \sin(\pi-C) = \sin C$, 故 A 正确;

$$\cos\left(\frac{A+B}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}\right) = \sin\frac{C}{2},$$

故 B 正确;

$$\begin{aligned} \sin(2A+2B) + \sin 2C &= \sin[2(A+B)] + \sin 2C \\ &= \sin[2(\pi-C)] + \sin 2C = \\ \sin(2\pi-2C) + \sin 2C &= -\sin 2C + \sin 2C = \\ 0, \text{ 故 C 正确;} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(2A+2B) + \cos 2C &= \cos[2(A+B)] + \cos 2C \\ &= \cos[2(\pi-C)] + \cos 2C = \\ \cos 2C &= \cos(2\pi-2C) + \cos 2C = \\ \cos 2C + \cos 2C &= 2\cos 2C, \text{ 故 D 错误.} \end{aligned}$$

14. 6 【解析】由题意, $f(x) = a \cdot$

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + b\tan x + 8 &= -a\sin x + b\tan x + \\ 8, f(-2) &= 10 = -a\sin(-2) + b\tan(-2) + \\ 8 &= a\sin 2 - b\tan 2 - 8 + 16 = -(-a\sin 2 + \end{aligned}$$



$$b \tan 2 + 8) + 16 = -f(2) + 16, \text{解得 } f(2) = 6.$$

15. 44.5 【解析】 $\because \sin 89^\circ = \sin(90^\circ - 1^\circ) = \cos 1^\circ, \therefore \sin^2 1^\circ + \sin^2 89^\circ = \sin^2 1^\circ + \cos^2 1^\circ = 1$, 同理 $\sin^2 2^\circ + \sin^2 88^\circ = 1, \dots$, $\sin^2 44^\circ + \sin^2 46^\circ = 1, \therefore \sin^2 1^\circ + \sin^2 2^\circ + \sin^2 3^\circ + \dots + \sin^2 88^\circ + \sin^2 89^\circ = 44 + \frac{1}{2} = 44.5$.

16. 【解】 (1) $f(\alpha) =$

$$\frac{\sin(\pi - \alpha) \cos(2\pi - \alpha) \sin\left(-\alpha + \frac{3\pi}{2}\right)}{\cos(-\alpha - \pi) \cos\left(-\alpha + \frac{7\pi}{2}\right)}$$

$$= \frac{\sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot (-\cos \alpha)}{(-\cos \alpha) \cdot (-\sin \alpha)} = -\cos \alpha,$$

即 $f(\alpha) = -\cos \alpha \left(\alpha \neq \frac{1}{2}k\pi, k \in \mathbf{Z} \right)$.

(2) 因为 $\cos\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) = \frac{1}{5}$, 所以 $-\sin \alpha = \frac{1}{5}$, 即 $\sin \alpha = -\frac{1}{5}$.

又因为 α 是第三象限角, 所以 $\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$, 所以

$$f(\alpha) = -\cos \alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5}.$$

(3) 由 $f(A) = \frac{3}{5}$, 得 $-\cos A = \frac{3}{5}$, 所

以 $\cos A = -\frac{3}{5}$, 所以角 A 是钝角,

$$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \frac{4}{5}, \tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = -\frac{4}{3}, \text{所以 } \tan A - \sin A = -\frac{4}{3} - \frac{4}{5} = -\frac{32}{15}.$$

17. 【证明】 (1) 左边 =

$$\frac{\tan(-\alpha) \sin(-\alpha) \cos(-\alpha)}{\sin\left[2\pi - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right] \cos\left[2\pi - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right]}$$

$$= \frac{(-\tan \alpha)(-\sin \alpha) \cos \alpha}{\sin\left[-\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right] \cos\left[-\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right]}$$

$$= \frac{\sin^2 \alpha}{-\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}$$

$$= \frac{\sin^2 \alpha}{-\cos \alpha \sin \alpha} = -\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\tan \alpha = \text{右边},$$

所以原等式成立.

(2) 左边 =



$$\begin{aligned}
 & \frac{\sin \left[\pi + \left(\frac{8\pi}{7} + \alpha \right) \right] + 3\cos \left[\left(\alpha + \frac{8\pi}{7} \right) - 3\pi \right]}{\sin \left[4\pi - \left(\alpha + \frac{8\pi}{7} \right) \right] - \cos \left[2\pi + \left(\alpha + \frac{8\pi}{7} \right) \right]} \\
 &= \frac{-\sin \left(\frac{8\pi}{7} + \alpha \right) - 3\cos \left(\alpha + \frac{8\pi}{7} \right)}{-\sin \left(\alpha + \frac{8\pi}{7} \right) - \cos \left(\alpha + \frac{8\pi}{7} \right)} \\
 &= \frac{\tan \left(\alpha + \frac{8\pi}{7} \right) + 3}{\tan \left(\alpha + \frac{8\pi}{7} \right) + 1} = \frac{m+3}{m+1} = \text{右边},
 \end{aligned}$$

所以原等式成立.

一题多解

(2) 由 $\tan \left(\alpha + \frac{8\pi}{7} \right) = m$,

得 $\tan \left(\alpha + \frac{\pi}{7} \right) = m$, 所以左边 =

$$\begin{aligned}
 & \frac{\sin \left[2\pi + \left(\frac{\pi}{7} + \alpha \right) \right] + 3\cos \left[\left(\alpha + \frac{\pi}{7} \right) - 2\pi \right]}{\sin \left[2\pi + \pi - \left(\alpha + \frac{\pi}{7} \right) \right] - \cos \left[2\pi + \pi + \left(\alpha + \frac{\pi}{7} \right) \right]} \\
 &= \frac{\sin \left(\frac{\pi}{7} + \alpha \right) + 3\cos \left(\alpha + \frac{\pi}{7} \right)}{\sin \left(\alpha + \frac{\pi}{7} \right) + \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{7} \right)} \\
 &= \frac{\tan \left(\alpha + \frac{\pi}{7} \right) + 3}{\tan \left(\alpha + \frac{\pi}{7} \right) + 1} = \frac{m+3}{m+1} = \text{右边}, \text{等式}
 \end{aligned}$$

成立.

5.4 三角函数的图象与性质

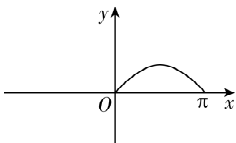
5.4.1 正弦函数、余弦函数的图象



对点上分

1. A 【解析】A 中当 $x = \pi$ 时, $y = 4$, 故 $(\pi, -1)$ 不是关键点, B, C, D 都是.

2. A 【解析】函数 $y = \sin x$ 在 $[0, \pi]$ 上的函数图象如图所示,



将该图象沿 y 轴对称, 即得 $y = \sin |x|$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上的图象, 故选 A.

快解

因为当 $x = \pm \frac{\pi}{2}$ 时, $y =$

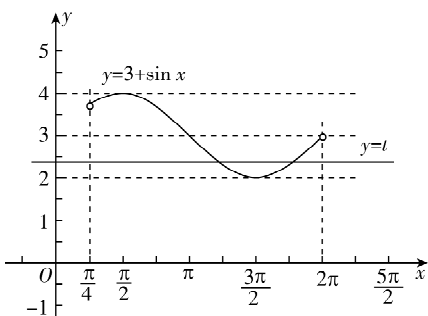
$$\sin \left| \pm \frac{\pi}{2} \right| = \sin \frac{\pi}{2} = 1, \text{ 所以排除 B, C, D.}$$



3. A 【解析】在同一直角坐标系中,作出

$y=3+\sin x, x \in \left(\frac{\pi}{4}, 2\pi\right)$ 与 $y=t$ 的图象,

由图象可知两图象的交点个数可能为 0, 1, 2, 故选 A.



4. D 【解析】函数 $f(x) = \left(\frac{\sin x}{e^x + e^{-x}}\right) \cos x$ 的

定义域为 \mathbf{R} , 由 $f(-x) = \frac{\sin(-x)}{e^x + e^{-x}} \cdot$

$\cos(-x) = -\frac{\sin x}{e^x + e^{-x}} \cdot \cos x = -f(x)$, 可得

函数 $f(x)$ 是 \mathbf{R} 上的奇函数, 图象关于原

点对称, 排除 A, C; 当 $x = \frac{\pi}{4}$ 时, $f(x) > 0$,

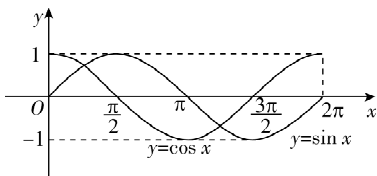
当 $x = 0$ 或 $x = \frac{\pi}{2}$ 时, $f(x) = 0$, 故 B 不满足

题意. 故选 D.

5. AC 【解析】在同一平面直角坐标系中

画出 $y = \sin x$ 和 $y = \cos x$ 在 $[0, 2\pi]$ 上的

图象, 如图:



在 $[0, 2\pi]$ 内, 当 $\cos x = \sin x$ 时, $x = \frac{\pi}{4}$

或 $x = \frac{5\pi}{4}$, 结合图象可知满足 $\cos x > \sin x$

的 x 的取值范围是 $\left[0, \frac{\pi}{4}\right)$ 和 $\left(\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right]$.

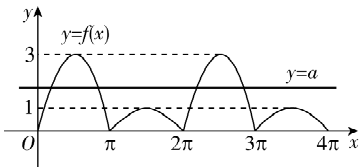
故选 AC.

6. $\{a | 1 < a < 3\}$ 【解析】由条件可知,

$$f(x) = \begin{cases} 3\sin x, & x \in [0, \pi) \cup [2\pi, 3\pi), \\ -\sin x, & x \in [\pi, 2\pi) \cup [3\pi, 4\pi], \end{cases}$$

在同一坐标系内作出函数 $y = a$ 和

$y = f(x)$ 的图象, 如图所示:





要使方程 $f(x) = a$ 有 4 个根, 则函数 $y = a$ 和 $y = f(x)$ 的图象有 4 个交点, 由图象可知 $1 < a < 3$.

7. B 【解析】由题意得 $2\sin x - 1 \geq 0$, 即 $\sin x \geq \frac{1}{2}$, 结合正弦曲线(图略)可

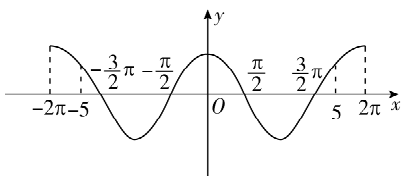
得 $x \in \left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right] (k \in \mathbf{Z})$, 故选 B.

8. $\left[-5, -\frac{3}{2}\pi \right) \cup \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \cup \left(\frac{3}{2}\pi, 5 \right]$

【解析】由题意得 x 满足不等式组

$$\begin{cases} \cos x > 0, \\ 25 - x^2 \geq 0, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} \cos x > 0, \\ -5 \leq x \leq 5, \end{cases} \quad \text{作出 } y = \cos x$$

的部分图象, 如图所示.



结合图象可得 $x \in \left[-5, -\frac{3}{2}\pi \right) \cup \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \cup \left(\frac{3}{2}\pi, 5 \right]$.



能力上分

1. B 【解析】由题意可知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{x \mid x \neq 0\}$, 关于原点对称, 且

$$f(-x) = \frac{\cos(-x)}{2^{-x} - 2^x} = -\frac{\cos x}{2^x - 2^{-x}} = -f(x), \text{ 所以}$$

函数 $f(x)$ 为奇函数, 故 A, C 错误;

又因为当 $x > 0$ 时, $2^x > 1, 2^{-x} \in (0, 1)$, 则 $2^x - 2^{-x} > 0$, 此时 $f(x)$ 的符号与 $y = \cos x$ 的符号一致, 故 D 错误. 故选 B.

2. AB 【解析】结合余弦函数 $y = \cos x$ 的图象(图略)可知 A, B 正确;

利用“五点法”画函数 $y = \cos x$ 的图象时, 其中一个关键点为 $\left(\frac{\pi}{2}, 0 \right)$, 故 C 错误;

函数 $y = 1 + \cos x$ 的图象可由 $y = \cos x$ 的图象向上平移 1 个单位长度得到, 故 D 错误. 故选 AB.

3. A 【解析】在 $\triangle ABC$ 中, $0 < A < \pi$, 一方面, 若 $\sin A > \frac{\sqrt{2}}{2}$, 结合正弦函数图象(图



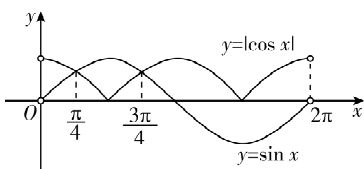
略)得 $\frac{\pi}{4} < A < \frac{3\pi}{4}$, 所以 $A > \frac{\pi}{4}$; 另一方面,

若 $A > \frac{\pi}{4}$, 取 $A = \frac{5\pi}{6}$, 则 $\sin A = \frac{1}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2}$. 所

以“ $\sin A > \frac{\sqrt{2}}{2}$ ”是“ $A > \frac{\pi}{4}$ ”的充分不必要

条件. 故选 A.

4. A 【解析】作出函数 $y = \sin x$ 以及 $y = |\cos x|$ 在 $(0, 2\pi)$ 内的图象如图所示, 由图可知 $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$. 故选 A.



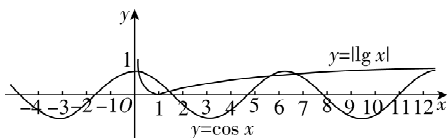
5. C 【解析】由题意得 $\begin{cases} 1 - 2\cos x \geq 0, \\ \sin x - \frac{\sqrt{2}}{2} > 0, \\ 0 \leq x \leq 2\pi, \end{cases}$ 解得

$$\begin{cases} \frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{5\pi}{3}, \\ \frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}, \end{cases} \text{ 所以 } \frac{\pi}{3} \leq x < \frac{3\pi}{4}, \text{ 即 函}$$

数 $f(x)$ 在 $[0, 2\pi]$ 上的定义域为

$$\left[\frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}\right). \text{ 故选 C.}$$

6. C 【解析】画出 $y = \cos x$ 与 $y = |\lg x|$ 的图象如图所示:



根据图象可知, 交点个数是 4, 故选 C.

7. $\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$ 【解析】由正弦函数的图象

知当 $x \in [0, 2\pi]$ 时, $\sin x \in [-1, 1]$, 要使得

方程 $\sin x = 4m + 1$ 在 $x \in [0, 2\pi]$ 上有

解, 则 $-1 \leq 4m + 1 \leq 1$, 故 $-\frac{1}{2} \leq m \leq 0$.

8. $\left(\frac{9}{4}, \frac{13}{4}\right]$ 【解析】为使函数 $f(x)$ 在

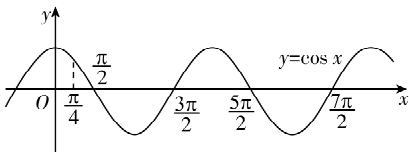
$\left[\frac{\pi}{4}, a\pi + \frac{\pi}{4}\right)$ 上有且仅有三个零点, 根

据余弦函数的图象可得 $\frac{5}{2}\pi < a\pi + \frac{\pi}{4} \leq$

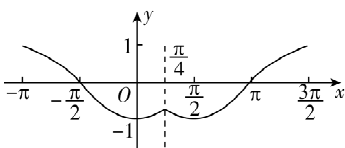
$\frac{7}{2}\pi$, 解得 $a \in \left(\frac{9}{4}, \frac{13}{4}\right]$, 故 a 的取值范



围是 $\left(\frac{9}{4}, \frac{13}{4}\right]$.



9. 【解】(1) $y=f(x)$ 的图象如图所示.



(2) 任取 $x \in \left[-\pi, \frac{\pi}{4}\right)$, 则 $\frac{\pi}{2} - x \in$

$\left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right]$, 因为函数 $y=f(x)$ 的图象关于

直线 $x=\frac{\pi}{4}$ 对称, 所以 $f(x)=f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$.

又当 $x \geq \frac{\pi}{4}$ 时, $f(x) = -\sin x$, 所以 $f(x) =$

$$f\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = -\cos x.$$

$$\text{所以 } f(x) = \begin{cases} -\cos x, & x \in \left[-\pi, \frac{\pi}{4}\right), \\ -\sin x, & x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right]. \end{cases}$$

(3) 当 $x=\frac{\pi}{4}$ 时, $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

因为 $-\frac{9}{10} \in \left(-1, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, 所以结合图象

可知 $f(x) = -\frac{9}{10}$ 有 4 个解, 分别设

为 x_1, x_2, x_3, x_4 , 且 4 个解满足 $x_1 < x_2 <$

$\frac{\pi}{4} < x_3 < x_4$, $x_1 + x_2 = 0$, $x_3 + x_4 = \pi$, 所以

$$M = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \pi.$$

5.4.2 正弦函数、余弦函数的性质



对点上分

1. D 【解析】函数的最小正周期为 $T =$

$$\frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi. \text{ 故选 D.}$$

2. BC 【解析】对于 A, 令 $x = \frac{\pi}{3}$, $y =$

$$\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 令 } x = \frac{4\pi}{3}, y = \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

所以 $y = \sin |x|$ 的最小正周期不是 π , 故

A 错误;



对于 B, $y = \sin x$ 的最小正周期为 2π , 所以 $y = |\sin x| + 1$ 的最小正周期为 π , 故 B 正确;

对于 C, $y = \cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$,

则 $y = \cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)$ 的最小正周期为 $\frac{2\pi}{2} = \pi$, 故 C 正确;

对于 D, $y = \sin x$ 的最小正周期为 2π , 而 $y = \sin x + 1$ 的图象是由 $y = \sin x$ 的图象向上平移 1 个单位长度得到的, 则 $y = \sin x + 1$ 的最小正周期为 2π , 故 D 错误.

3. D 【解析】当 $a = c = 0, b \neq 0$ 时, 函

数 $f(x) = b\sin 2x$, 最小正周期为 $\frac{2\pi}{2} = \pi$,

故 A 可能;

当 $b = c = 0, a \neq 0$ 时, 函数 $f(x) = a\sin x$, 最小正周期为 2π , 故 B 可能;

当 $a = b = 0, c \neq 0$ 时, 函数 $f(x) = c\sin 4x$, 最小正周期为 $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, 故 C 可能;

对于 D, $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = a\sin \frac{\pi}{3} + b\cos \frac{2\pi}{3} +$

$c\sin \frac{4\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}a - \frac{1}{2}b - \frac{\sqrt{3}}{2}c, f\left(\frac{2\pi}{3}\right) =$

$a\sin \frac{2\pi}{3} + b\sin \frac{4\pi}{3} + c\sin \frac{8\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}a - \frac{\sqrt{3}}{2}b +$

$\frac{\sqrt{3}}{2}c$, 则当 $T = \frac{\pi}{3}$ 时, $b = 0, c = 0$, 因为

$f\left(\frac{4\pi}{3}\right) = a\sin \frac{4\pi}{3} + b\sin \frac{8\pi}{3} + c\sin \frac{16\pi}{3} =$

$-\frac{\sqrt{3}}{2}a + \frac{\sqrt{3}}{2}b - \frac{\sqrt{3}}{2}c$, 令 $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = f\left(\frac{4\pi}{3}\right)$, 得

$a = 0, b = 0$, 所以 $a = 0, b = 0, c = 0$, 与 $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$ 矛盾, 故 D 不可能.

4. ± 2 【解析】因为函数 $f(x) = 3\cos\left(ax -$

$\frac{\pi}{6}\right)$ 的最小正周期为 π , 所以 $\frac{2\pi}{|a|} = \pi$, 解

得 $a = \pm 2$.

易错警示

思维定式导致忽视变量取值范围致错

三角函数问题中, 自变量 x 的系数常常被限定为正数, 但这并不是一定的, 如本题中没有指明 $a > 0$, 求解后 a 有两个值.



5.0 【解析】由题意可知,函数 $f(x) =$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \text{ 的最小正周期 } T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4.$$

$$\text{又 } f(1) = \sin \frac{\pi}{2} = 1, f(2) = \sin \pi = 0,$$

$$f(3) = \sin \frac{3\pi}{2} = -1, f(4) = \sin 2\pi = 0, \text{ 所}$$

$$\text{以 } f(1) + f(2) + f(3) + f(4) = 0.$$

$$\text{又 } 2\,023 = 4 \times 505 + 3, \text{ 所以 } f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(2\,022) + f(2\,023) = f(1) + f(2) + f(3) = 0.$$

6.C 【解析】由正弦函数的对称性可知

$$\sin\left(a + \frac{\pi}{6}\right) = 0, \text{ 则 } a + \frac{\pi}{6} = k\pi, k \in \mathbf{Z},$$

$$a = -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbf{Z}, \text{ 当 } k=0 \text{ 时, 符合条件}$$

$$\text{的一个 } a = -\frac{\pi}{6}. \text{ 故选 C.}$$

7.C 【解析】由 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , 且为

$$\text{偶函数, 得 } f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\text{即 } -\cos(-\pi + \varphi) = \cos(\pi + \varphi),$$

$$\text{可得 } \cos \varphi = -\cos \varphi, \text{ 即 } \cos \varphi = 0.$$

$$\text{因为 } \varphi \in [0, \pi], \text{ 所以 } \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{当 } \varphi = \frac{\pi}{2} \text{ 时, } f(x) = -\sin x \sin 2x \text{ 为偶函}$$

$$\text{数, 满足题意. 故选 C.}$$

一题多解

因为 $f(x)$ 是偶函数, $y =$

$\sin x$ 是奇函数, 所以 $y = \cos(2x + \varphi)$ 是

奇函数, 所以 $\varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$. 因为

$\varphi \in [0, \pi],$ 所以 $\varphi = \frac{\pi}{2}$. 故选 C.

8.B 【解析】由 $\omega x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$ 可

$$\text{得 } f(x) = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{4}\right) (\omega > 0) \text{ 的图象的}$$

$$\text{对称轴为 } x = \frac{\pi}{4\omega} + \frac{k\pi}{\omega}, k \in \mathbf{Z}, \text{ 当 } k=0$$

$$\text{时, } x = \frac{\pi}{4\omega}, \text{ 当 } k=1 \text{ 时, } x = \frac{5\pi}{4\omega}, \text{ 当 } k=2$$

$$\text{时, } x = \frac{9\pi}{4\omega}.$$

$$\text{因为 } \omega > 0, \text{ 由题意 } \begin{cases} 0 \leq \frac{\pi}{4\omega} \leq \pi, \\ 0 \leq \frac{5\pi}{4\omega} \leq \pi, \\ \frac{9\pi}{4\omega} > \pi, \end{cases}$$



可得 $\frac{5}{4} \leq \omega < \frac{9}{4}$, 故选 B.

9. AD 【解析】对于 A, 函数 $f(x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的最小正周期 $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$, 故 A 正确;

对于 B, 因为 $f\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \cos\left(2 \times \frac{7\pi}{12} + \frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{3\pi}{2} = 0$, 所以 $y = f(x)$ 的图象不关于直线 $x = \frac{7\pi}{12}$ 对称, 故 B 错误;

对于 C, 当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $2x + \frac{\pi}{3} \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right)$, 因为 $y = \cos x$ 在 $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right)$ 上不单调, 所以 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上不单调, 故 C 错误;

对于 D, 因为 $f\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(2 \times \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{\pi}{2} = 0$, 所以 $f(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{\pi}{12}, 0\right)$ 对称, 故 D 正确. 故选 AD.

10. D 【解析】对于 A, C, 最小正周期为 2π , 故错误;

对于 B, $y = |\sin x|$ 的图象可由 $y = \sin x$ 的图象将 x 轴下方部分翻折到 x 轴上方, 原来在 x 轴上及 x 轴上方部分不变而得到, 则周期为 π , 但在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增, 故错误;

对于 D, $y = |\cos x|$ 的图象可由 $y = \cos x$ 的图象将 x 轴下方部分翻折到 x 轴上方, 原来在 x 轴上和 x 轴上方部分不变而得到, 则周期为 π , 且在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减, 故正确.

11. A 【解析】令 $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \geq 0$, 可得

$$2k\pi \leq x + \frac{\pi}{3} \leq 2k\pi + \pi, k \in \mathbf{Z}. \text{ 当 } 2k\pi -$$

$$\frac{\pi}{2} \leq x + \frac{\pi}{3} \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z} \text{ 时, 函数}$$

$y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ 单调递增. 所以当

$$2k\pi \leq x + \frac{\pi}{3} \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}, \text{ 即 } 2k\pi -$$



$\frac{\pi}{3} \leq x \leq 2k\pi + \frac{\pi}{6}, k \in \mathbf{Z}$ 时, $f(x)$ 单调递增. 故 $f(x)$ 在 $\left[2k\pi - \frac{\pi}{3}, 2k\pi + \frac{\pi}{6}\right], k \in \mathbf{Z}$ 上单调递增. 故选 A.

易错警示 忽略定义域

确定函数性质要树立定义域优先的意识.

12. C 【解析】函数 $f(x) = 2\cos\left(\omega x + \frac{\pi}{6}\right) + 2 (\omega > 0)$, 当 $x \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$ 时, $\omega x + \frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi\omega}{6} + \frac{\pi}{6}, \frac{\pi\omega}{3} + \frac{\pi}{6}\right]$.

而余弦函数 $y = \cos x$ 在 $[0, \pi]$ 上单调递减, 又 $-\frac{\pi\omega}{6} + \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{6}, \frac{\pi\omega}{3} + \frac{\pi}{6} > \frac{\pi}{6}$, 因此 $\left[-\frac{\pi\omega}{6} + \frac{\pi}{6}, \frac{\pi\omega}{3} + \frac{\pi}{6}\right] \subseteq [0, \pi]$, 解得 $0 < \omega \leq 1$.

由 $f(x) = 0$, 得 $\cos\left(\omega x + \frac{\pi}{6}\right) = -1$, 当 $x \in [0, \pi]$ 时, $\omega x + \frac{\pi}{6} \in \left[\frac{\pi}{6}, \pi\omega + \frac{\pi}{6}\right]$.

而函数 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上有且仅有 1 个零点, 则 $\pi \leq \pi\omega + \frac{\pi}{6} < 3\pi$, 解得 $\frac{5}{6} \leq \omega < \frac{17}{6}$, 因此 $\frac{5}{6} \leq \omega \leq 1$, 结合选项可知应选 C.

13. AB 【解析】 $\because f(x) = \sin |x| + |\sin x|$ 的定义域为 \mathbf{R} , $f(-x) = \sin |-x| + |\sin(-x)| = \sin |x| + |\sin x| = f(x)$, $\therefore f(x)$ 是偶函数, 故 A 正确;

当 $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 时, $f(x) = \sin |x| + |\sin x| = 2\sin x$, $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 上单调递减, 故 B 正确;

当 $x \in [0, \pi]$ 时, 令 $f(x) = \sin |x| + |\sin x| = 2\sin x = 0$, 得 $x = 0$ 或 $x = \pi$, 又 $\because f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上为偶函数, $\therefore f(x) = 0$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上的根为 $-\pi, 0, \pi$, 即 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上有 3 个零点, 故 C 错误;

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left|-\frac{\pi}{2}\right| + \left|\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right| = 2,$$



$$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \sin\left|\frac{3\pi}{2}\right| + \left|\sin\frac{3\pi}{2}\right| = 0, \text{ 所以}$$

2π 不是 $f(x)$ 的一个周期, 故 D 错误.

14. $\left[\frac{5\pi}{12}, \frac{\pi}{2}\right]$ 【解析】 $y = 2\sin\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)$

$$= -2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right), \text{ 要求 } y =$$

$$2\sin\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) \text{ 的单调递增区间, 即求}$$

$$y = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \text{ 的单调递减区间.}$$

$$\text{令 } \frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x - \frac{\pi}{3} \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z},$$

$$\text{解得 } \frac{5\pi}{12} + k\pi \leq x \leq \frac{11\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbf{Z}, \text{ 又 } x \in$$

$$\left[0, \frac{\pi}{2}\right], \text{ 令 } k=0, \text{ 故函数 } y = 2\sin\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)$$

$$\text{的单调递增区间为 } \left[\frac{5\pi}{12}, \frac{\pi}{2}\right].$$

易错警示 求单调区间时忽略自变量系数正负的影响致错

$$\text{本题中, 函数 } y = 2\sin\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right), x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ 的内层函数中 } x \text{ 的}$$

$$\text{系数为负, 所以需要先将 } x \text{ 的系数转}$$

$$\text{化为正数, 即 } y = 2\sin\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) =$$

$$-2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right), \text{ 要求 } y = 2\sin\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)$$

$$\text{的单调递增区间, 就是求 } y =$$

$$2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \text{ 的单调递减区间.}$$

15. $\left(\frac{\pi}{6}, +\infty\right)$ 【解析】 $f\left(x + \frac{\pi}{6}\right) =$

$$\sin\left(2x + \frac{\pi}{3} + \varphi\right) \left(0 < \varphi < \frac{\pi}{2}\right) \text{ 为偶函}$$

$$\text{数, 故 } \frac{\pi}{3} + \varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}, \text{ 故 } \varphi =$$

$$\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbf{Z}, \text{ 由于 } 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}, \text{ 故 } \varphi =$$

$$\frac{\pi}{6}, \text{ 则 } f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right).$$

$$\text{令 } 2x + \frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right], k \in \mathbf{Z}, \text{ 解得 } x \in \left[-\frac{\pi}{3} + k\pi,$$

$$\frac{\pi}{6} + k\pi\right], k \in \mathbf{Z}, \text{ 故 } f(x) \text{ 的一个单调递}$$



增区间为 $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right]$. 由于区间 $[-a, a]$ 关于原点对称, 要使 $f(x)$ 在区间 $[-a, a]$ 上不单调, 则 $a > \frac{\pi}{6}$, 所以实数 a 的取值范围为 $\left(\frac{\pi}{6}, +\infty\right)$.

16. B 【解析】由题意得 $\alpha = -\beta + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 所以 $\cos \alpha = \cos(-\beta + 2k\pi) = \cos \beta$, 因为 $\beta \in \left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$, 所以 $-1 \leq \cos \beta \leq \frac{1}{2}$, 则 $-1 \leq \cos \alpha \leq \frac{1}{2}$, 所以当 $\beta = \frac{\pi}{3}$, 即 $\alpha = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$ 时, $\cos \alpha$ 取得最大值, 且最大值为 $\frac{1}{2}$.

17. B 【解析】 $f(x) = |\cos x| + \cos |x| =$

$$\begin{cases} 2\cos x, & -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}, \\ 0, & \frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}, \end{cases}$$
 所以函数 $f(x) = |\cos x| + \cos |x|$ 的值域为 $[0, 2]$. 故选 B.

18. A 【解析】 $f(x) = -1 + 2\cos^2 x + k(1 - \sin x) = -1 + 2(1 - \sin^2 x) + k(1 - \sin x) = -2\sin^2 x - k\sin x + 1 + k$, 设 $t = \sin x, t \in [-1, 1]$, 则 $y = -2t^2 - kt + 1 + k$, 其图象开口向下, 对称轴为直线 $t = -\frac{-k}{-4} = -\frac{k}{4} > 1$, 所以函数 $y = -2t^2 - kt + 1 + k$ 在 $[-1, 1]$ 上单调递增, 所以 $y_{\max} = -2 - k + 1 + k = -1$, 即 $f(x)$ 的最大值为 -1 . 故选 A.

19. $\left[\frac{5\pi}{12}, \frac{5\pi}{6}\right]$ 【解析】当 $x = 0$ 时, $y = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$, 由 $x \in [0, a]$, 可得 $2x - \frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{3}, 2a - \frac{\pi}{3}\right]$. 函数 $y = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ 在区间 $[0, a]$ 上的值域为 $[-\sqrt{3}, 2]$, 则根据正弦函数的图象知 $\frac{\pi}{2} \leq 2a - \frac{\pi}{3} \leq \frac{4\pi}{3}$, 解得 $\frac{5\pi}{12} \leq a \leq \frac{5\pi}{6}$, 所以实数 a 的取值范围是 $\left[\frac{5\pi}{12}, \frac{5\pi}{6}\right]$.

20. 【解】(1) $f(x)$ 的最小正周期 $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$.



因为 $f\left(\frac{\pi}{12}\right) = 1$, 所以 $\sin\left(\frac{\pi}{6} + \varphi\right) = 1$,

即 $\frac{\pi}{6} + \varphi = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$, 所以 $\varphi =$

$2k\pi + \frac{\pi}{3}, k \in \mathbf{Z}$, 又 $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$, 所以 k

取 0, $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

(2) 由 (1) 知, $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$.

因为 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, 所以 $2x + \frac{\pi}{3} \in$

$\left[\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right]$.

因为 $y = \sin x$ 在 $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增,

在 $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{4\pi}{3}\right]$ 上单调递减, 所以当 $2x +$

$\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$, 即 $x = \frac{\pi}{12}$ 时, $f(x)$ 取得最大值 1.

因为 $\sin \frac{\pi}{3} > \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, 所以当 $2x +$

$\frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$, 即 $x = \frac{\pi}{2}$ 时, $f(x)$ 取得最小

值 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(3) 由 $f(x) \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ 得 $\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$,

所以 $2k\pi + \frac{\pi}{4} \leq 2x + \frac{\pi}{3} \leq 2k\pi + \frac{3\pi}{4}, k \in$

\mathbf{Z} , 所以 $k\pi - \frac{\pi}{24} \leq x \leq k\pi + \frac{5\pi}{24}, k \in \mathbf{Z}$.

又 $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, 所以 k 只能取 0, 得

$-\frac{\pi}{24} \leq x \leq \frac{5\pi}{24}$, 即 x 的取值构成的集合

为 $\left\{x \mid -\frac{\pi}{24} \leq x \leq \frac{5\pi}{24}\right\}$.



能力上分

1. B 【解析】因为 $0 < x < \pi$, 所以 $0 < \omega x < \omega\pi$,

令 $f(x) = \sin \omega x + 1 = 0$, 则方程 $\sin \omega x = -1$

有 2 个根, 所以 $\frac{7}{2}\pi < \omega\pi \leq \frac{11}{2}\pi$, 解得

$\frac{7}{2} < \omega \leq \frac{11}{2}$, 则 ω 的取值范围

是 $\left(\frac{7}{2}, \frac{11}{2}\right]$.

2. B



攻略上分

本题要比较正、余弦值的大小, 题中余弦值比较多, 所以先利用诱导公式完成向余弦的“异化同”, 再根据余弦函数的单调性“判增减”后比大小.



【解析】由题意得 $b = \sin(180^\circ - 46^\circ) = \sin 46^\circ = \sin(90^\circ - 44^\circ) = \cos 44^\circ$, $c = \cos 43^\circ$.

因为 $y = \cos x$ 在区间 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上单调递减, 所以 $\cos 43^\circ > \cos 44^\circ > \cos 46^\circ$, 即 $c > b > a$. 故选 B.

3. A 【解析】因为 $\frac{\pi}{4} < 1 < \frac{\pi}{3}$, 所以 $\frac{\sqrt{2}}{2} < \sin 1 < \frac{\sqrt{3}}{2}$, 故 $(\sin 1)^{-0.1} > (\sin 1)^0 = 1$, 而 $0 < 3^{-\sin 1} < 3^0 = 1$, $\log_2(\sin 1) < \log_2 1 = 0$, 故 $a > 1 > b > 0 > c$. 故选 A.

4. D 【解析】由函数 $f(x) = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ 的值域为 $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right]$, 得 $-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq \sqrt{2}$, 则 $-\frac{1}{2} \leq \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1$, 即 $2k\pi - \frac{\pi}{6} \leq x + \frac{\pi}{4} \leq 2k\pi + \frac{7\pi}{6}$ ($k \in \mathbf{Z}$), 故 $2k\pi - \frac{5\pi}{12} \leq x \leq 2k\pi + \frac{11\pi}{12}$ ($k \in \mathbf{Z}$).

又 $f(x)$ 的定义域为 $[a, b]$, 所以

$$(b-a)_{\max} = 2k\pi + \frac{11\pi}{12} - \left(2k\pi - \frac{5\pi}{12}\right) = \frac{4\pi}{3} \quad (k \in \mathbf{Z}), \quad (b-a)_{\min} = \frac{2k\pi + \frac{11\pi}{12} - \left(2k\pi - \frac{5\pi}{12}\right)}{2} = \frac{2\pi}{3} \quad (k \in \mathbf{Z}),$$

所以 $b-a$ 的取值范围是 $\left[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right]$. 故选 D.

5. C 【解析】因为 $\omega > 0$, 当 $0 < x < \frac{\pi}{3}$ 时,

$$-\frac{\pi}{6} < \omega x - \frac{\pi}{6} < \frac{\omega\pi}{3} - \frac{\pi}{6}.$$

因为函数 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$ 上存在最值, 所以

$$\frac{\omega\pi}{3} - \frac{\pi}{6} > \frac{\pi}{2}, \text{ 解得 } \omega > 2.$$

$$\text{当 } \frac{2\pi}{3} < x < \pi \text{ 时, } \frac{2\pi\omega}{3} - \frac{\pi}{6} < \omega x - \frac{\pi}{6} < \pi\omega - \frac{\pi}{6}.$$

因为函数 $f(x)$ 在 $\left(\frac{2\pi}{3}, \pi\right)$ 上单调, 所以



$$\left(\frac{2\pi\omega}{3} - \frac{\pi}{6}, \pi\omega - \frac{\pi}{6}\right) \subseteq \left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right) (k \in \mathbf{Z}),$$

$$\text{所以} \begin{cases} \frac{2\pi\omega}{3} - \frac{\pi}{6} \geq k\pi - \frac{\pi}{2}, \\ \pi\omega - \frac{\pi}{6} \leq k\pi + \frac{\pi}{2}, \end{cases} \text{其中 } k \in \mathbf{Z}, \text{解}$$

$$\text{得 } \frac{3}{2}k - \frac{1}{2} \leq \omega \leq k + \frac{2}{3} (k \in \mathbf{Z}), \text{所以}$$

$$\frac{3}{2}k - \frac{1}{2} \leq k + \frac{2}{3}, \text{解得 } k \leq \frac{7}{3}.$$

又因为 $\omega > 0$, 所以 $k \in \{0, 1, 2\}$.

$$\text{当 } k=0 \text{ 时, } 0 < \omega \leq \frac{2}{3};$$

$$\text{当 } k=1 \text{ 时, } 1 \leq \omega \leq \frac{5}{3};$$

$$\text{当 } k=2 \text{ 时, } \frac{5}{2} \leq \omega \leq \frac{8}{3}.$$

又因为 $\omega > 2$, 所以 ω 的取值范围是

$$\left[\frac{5}{2}, \frac{8}{3}\right]. \text{ 故选 C.}$$

6. ABC 【解析】对于 A 选项, 由题意知

$$f\left(\frac{\pi}{8}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \varphi\right) = \frac{1}{2}, \text{ 又 } 0 < \varphi < \frac{\pi}{2},$$

$$\text{所以 } \frac{\pi}{4} < \varphi + \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{4}, \text{ 则 } \varphi + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3}, \text{ 可得}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{12}, \text{ A 正确;}$$

$$\text{对于 B 选项, } f\left(\frac{11\pi}{24}\right) = \cos\left(2 \times \frac{11\pi}{24} + \frac{\pi}{12}\right) = \cos \pi = -1, \text{ 所以函数 } f(x) \text{ 的图象}$$

$$\text{关于直线 } x = \frac{11}{24}\pi \text{ 对称, 故 B 正确;}$$

$$\text{对于 C 选项, } f\left(-\frac{7\pi}{24}\right) = \cos\left[2 \times \left(-\frac{7\pi}{24}\right) + \frac{\pi}{12}\right] = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0, \text{ 所以 } f(x) \text{ 的图象}$$

$$\text{关于点 } \left(-\frac{7\pi}{24}, 0\right) \text{ 对称, 故 C 正确;}$$

$$\text{对于 D 选项, 若 } x \in \left(0, \frac{\pi}{6}\right), \text{ 则 } 2x + \frac{\pi}{12} \in \left(\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}\right), \text{ 且 } \left(\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}\right) \subseteq \left(0, \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\text{所以 } f(x) \text{ 在 } \left(0, \frac{\pi}{6}\right) \text{ 上单调递减, 故 D 错}$$

$$\text{误. 故选 ABC.}$$

7. AB 【解析】 $f(x) = \frac{\sin x}{3 - \cos^2 x}$, 则 $f(-x) =$



$$\frac{\sin(-x)}{3-\cos^2(-x)} = -\frac{\sin x}{3-\cos^2 x} = -f(x), \text{ 所以}$$

以 $f(x)$ 为奇函数, 故 A 正确.

$$f(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{3-\cos^2(x+\pi)} = -\frac{\sin x}{3-\cos^2 x} =$$

$-f(x)$, 所以 $f(x)$ 的最小正周期不是 π , 故 C 错误.

$$f(2\pi - x) = \frac{\sin(2\pi - x)}{3-\cos^2(2\pi - x)} = -\frac{\sin x}{3-\cos^2 x} = -f(x), \text{ 所以 } f(x) \text{ 的图象不关}$$

于直线 $x=\pi$ 对称, 故 D 错误.

$$f(x) = \frac{\sin x}{3-\cos^2 x} = \frac{\sin x}{2+\sin^2 x}, \text{ 显然 } f(x) = f(x+2\pi), \text{ 且 } f(0) = f(2\pi) = 0, \text{ 当 } x \in (0, \pi)$$

时, $f(x) = \frac{1}{\sin x + \frac{2}{\sin x}}$, 由 $0 < \sin x \leq 1$, 设

$t = \sin x, t \in (0, 1]$, 且 $y = \frac{2}{t} + t$ 在 $(0,$

$1]$ 上单调递减, 所以 $\frac{2}{t} + t \geq 3$, 即 $\frac{2}{\sin x} +$

$\sin x \geq 3$, 所以 $f(x) = \frac{1}{\frac{2}{\sin x} + \sin x} \leq \frac{1}{3}$.

当 $x \in (\pi, 2\pi)$ 时, $f(x) < 0$, 所以 $f(x)$ 的最大值为 $\frac{1}{3}$, 故 B 正确. 故选 AB.

8. $\frac{3\pi}{8}$ 【解析】因为函数 $f(x) = \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{8} + \varphi\right)$ 是奇函数, 所以 $\frac{\pi}{8} + \varphi = k\pi +$

$\frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$, 即 $\varphi = k\pi + \frac{3}{8}\pi (k \in \mathbf{Z})$, 又因

为 $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, 所以令 $k=0$, 得 $\varphi =$

$\frac{3}{8}\pi$.

9. $\left[-\frac{3}{4} - \sqrt{3}, +\infty\right)$ 【解析】 $\cos^2 x +$

$$2\sin x - 1 - m \leq 0 \Rightarrow m \geq \cos^2 x + 2\sin x - 1,$$

$$\text{其中 } \cos^2 x + 2\sin x - 1 = 1 - \sin^2 x + 2\sin x -$$

$$1 = -\sin^2 x + 2\sin x, \text{ 故 } m \geq -\sin^2 x + 2\sin x$$

在 $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right]$ 上有解.

令 $\sin x = t \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right]$, 则 $m \geq -t^2 +$

$2t = -(t-1)^2 + 1$, 其中 $y = -(t-1)^2 + 1$ 在

$t \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right]$ 上单调递增, 故当 $t = -$



$\frac{\sqrt{3}}{2}$ 时, $y = -(t-1)^2 + 1$ 取得最小值, 最小值为 $-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right)^2 + 1 = -\left(\frac{3}{4} + \sqrt{3} + 1\right) + 1 = -\frac{3}{4} - \sqrt{3}$, 故 $m \geq -\frac{3}{4} - \sqrt{3}$, 即实数 m 的取值范围是 $\left[-\frac{3}{4} - \sqrt{3}, +\infty\right)$.

10. 【解】 (1) 因为 $x \in \mathbf{R}$, 所以 $\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \in [-1, 1]$.

因为 $a < 0$, 所以 $a\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \in [a, -a]$, 因此可得 $a\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + b \in [b+a, b-a]$.

又因为 $1 \leq f(x) \leq 3$, 所以 $\begin{cases} b+a=1, \\ b-a=3, \end{cases}$ 解得 $a=-1, b=2$.

(2) 由 (1) 得 $f(x) = -\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + 2$,

令 $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, 得

$-\frac{\pi}{3} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{6} + k\pi (k \in \mathbf{Z})$, 所以函

数 $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ 的单调递增区间为

$\left[-\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{\pi}{6} + k\pi\right] (k \in \mathbf{Z})$, 得函

数 $f(x) = -\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + 2$ 的单调递减

区间为 $\left[-\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{\pi}{6} + k\pi\right] (k \in \mathbf{Z})$.

令 $\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, 得

$\frac{\pi}{6} + k\pi \leq x \leq \frac{2\pi}{3} + k\pi (k \in \mathbf{Z})$, 所以函数

$y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ 的单调递减区间为

$\left[\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{2\pi}{3} + k\pi\right] (k \in \mathbf{Z})$, 得函

数 $f(x) = -\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + 2$ 的单调递

增区间为 $\left[\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{2\pi}{3} + k\pi\right] (k \in \mathbf{Z})$.

综上所述, $f(x)$ 的单调递增区间是

$\left[\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{2\pi}{3} + k\pi\right] (k \in \mathbf{Z})$, 单调递减

区间是 $\left[-\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{\pi}{6} + k\pi\right] (k \in \mathbf{Z})$.



11. 【解】(1) 由题意得 $f(\alpha) =$

$$\frac{\sin(-\alpha) \cos\left(\frac{5}{2}\pi + \alpha\right)}{\cos\left(-\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \tan(-\pi + \alpha)} =$$

$$\frac{-\sin \alpha \cdot (-\sin \alpha)}{\sin \alpha \cdot \tan \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}} = \cos \alpha.$$

(2) 由三角函数定义可得 $\cos \alpha =$

$$\frac{m}{\sqrt{m^2+3}} = \frac{1}{2}, \text{ 且 } m > 0, \text{ 解得 } m = 1.$$

(3) 因为 $f(\alpha) = \cos \alpha$, 所以 $f(x) = \cos x$,

$$g(x) = 2[f(x)]^2 + f\left(-\frac{\pi}{2} + x\right) + 2 =$$

$$2\cos^2 x + \cos\left(-\frac{\pi}{2} + x\right) + 2 = 2(1 - \sin^2 x) +$$

$$\sin x + 2 = -2\sin^2 x + \sin x + 4 = -2\left(\sin x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{33}{8}.$$

因为 $\sin x \in [-1, 1]$, 所以当 $\sin x = \frac{1}{4}$

时, $g(x)$ 取到最大值, $g(x)_{\max} = \frac{33}{8}$;

当 $\sin x = -1$ 时, $g(x)$ 取到最小值,

$$g(x)_{\min} = 1.$$

所以 $g(x)$ 的值域为 $\left[1, \frac{33}{8}\right]$.

12. (1) 【解】由 $t = \frac{2}{3}$, 得 $f(x) = -(2 -$

$$2\cos^2 x) + 2\cos x + 3 \times \frac{2}{3} = 2\cos^2 x + 2\cos x,$$

当 $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ 时, $\cos x \in [-1, 0)$,

令 $f(x) = 2\cos x(\cos x + 1) = 0$, 故

$\cos x = -1$ 或 $\cos x = 0$ (舍), 故 $x = \pi$.

(2) ①【解】令 $k = \cos x$, 因为 $x \in \left(-\pi,$

$-\frac{\pi}{2}\right)$, 所以 $\cos x \in (-1, 0)$, 即 $k \in$

$(-1, 0)$,

则 $f(x) = -2\sin^2 x + 2\cos x + 3t = 2\cos^2 x +$

$$2\cos x + 3t - 2 = 2k^2 + 2k + 3t - 2.$$

易知 $y = \cos x$ 在 $\left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增,

由题意得关于 k 的方程 $2k^2 + 2k + 3t - 2 = 0$

在 $(-1, 0)$ 上有两个不相等的实数根, 则有

$$\begin{cases} 3t - 2 > 0, \\ 2 \times (-1)^2 + 2 \times (-1) + 3t - 2 > 0, \text{ 解得 } \frac{2}{3} < t < \\ \Delta = 4 - 4 \times 2(3t - 2) > 0, \end{cases}$$



$\frac{5}{6}$, 即 t 的取值范围为 $\left(\frac{2}{3}, \frac{5}{6}\right)$.

②【证明】令 $k_1 = \cos m < 0, k_2 = \cos n < 0$, 则 k_1, k_2 为关于 k 的方程 $2k^2 + 2k + 3t - 2 = 0$ 的两个根,

所以 $k_1 + k_2 = -1, k_1 k_2 = \frac{3t-2}{2}$, 所以

$\cos m + \cos n = -1, \cos m \cdot \cos n = \frac{3t-2}{2}$,

所以 $(\cos m + \cos n)^2 = (-1)^2 = 1$,

即 $\cos^2 m + \cos^2 n = 1 - 2\cos m \cdot \cos n = 1 -$

$2 \times \frac{3t-2}{2} = 3 - 3t$,

即 $\cos^2 m - \sin^2 n = 2 - 3t$.

由 ① 知 $2 - 3t \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$, 故

$\cos^2 m < \sin^2 n$.

又 $m, n \in \left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right)$, 所以 $\cos m >$

$\sin n$.


由于 $-\pi < n < -\frac{\pi}{2}$, 则 $-\pi < -\frac{3\pi}{2} - n < -\frac{\pi}{2}$,

且 $\sin n = \cos\left(-\frac{3}{2}\pi - n\right)$,

故 $\cos m > \cos\left(-\frac{3\pi}{2} - n\right)$, 又 $y = \cos x$ 在

$\left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增, 故 $m > -\frac{3\pi}{2} -$

n , 即 $m + n > -\frac{3\pi}{2}$.

13.  **思路导引** (1) 根据函数具有性质 P 的定义, 即可判断;

(2) 根据函数具有性质 P , 可知 $f(0 + 2\pi) = f(0) + f(2\pi)$, 可求 φ , 再讨论 $f(2\pi)$ 是否为 0, 即可求 ω ;

(3) 根据 (2) 可将方程转化为 $f\left(x + \varphi + \frac{\omega\pi}{24}\right) = f\left(x + \frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = a$, 再令 $t = 2x + \frac{\pi}{6}$, 结合正弦函数图象的对称性, 即可求解.

【解】(1) $m(x + 2\pi) = 2(x + 2\pi) - 1 = 2x + 4\pi - 1, m(2\pi) = 4\pi - 1$, 故 $m(x + 2\pi) \neq m(x) + m(2\pi)$, 则函数 $m(x) = 2x - 1$ 不具有性质 P ;

$n(x + 2\pi) = 1 - \cos(x + 2\pi) = 1 - \cos x$,

$n(2\pi) = 1 - \cos 2\pi = 0$, 故 $n(x + 2\pi) =$



$n(x)+n(2\pi)$, 则函数 $n(x)=1-\cos x$ 具有性质 P .

(2) 若 $f(x)$ 具有性质 P , 则 $f(0+2\pi)=f(0)+f(2\pi)$,

则 $f(0)=\sin \varphi=0$, 因为 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$, 所以

$\varphi=0$, 则 $f(x)=\sin \omega x$.

由 $f(x+2\pi)=f(x)+f(2\pi)$ 得 $f(2k\pi)=k \cdot f(2\pi) (k \in \mathbf{Z})$.

若 $f(2\pi) \neq 0$, 则存在 $k_0 \in \mathbf{Z}$, 使得 $|k_0 \cdot f(2\pi)| > 1$, 而 $|f(x)| \leq 1$, 上式不成立, 故 $f(2\pi)=0$, 即 $\sin 2\omega\pi=0$.

因为 $\frac{3}{2} < \omega < \frac{5}{2}$, 所以 $3\pi < 2\omega\pi < 5\pi$, 则

$2\omega\pi=4\pi$, 即 $\omega=2$, 则 $f(x)=\sin 2x$.

验证: 当 $\omega=2, \varphi=0$, 即 $f(x)=\sin 2x$ 时, 对任意 $x \in \mathbf{R}$, $f(x+2\pi)=\sin [2(x+2\pi)]=\sin 2x$, $f(x)+f(2\pi)=\sin 2x+\sin 4\pi=\sin 2x$, 等式 $f(x+2\pi)=f(x)+f(2\pi)$ 成立, 故存在 $\omega=2, \varphi=0$, 使函数 $f(x)$ 具有性质 P .

(3) 由(2)知, $f(x)=\sin 2x, \omega=2, \varphi=0$,

由题意有 $f\left(x+\varphi+\frac{\omega\pi}{24}\right)=f\left(x+\frac{\pi}{12}\right)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=a$.

令 $t=2x+\frac{\pi}{6}$, 则当 $x \in \left[\frac{\pi}{12}, \frac{7}{6}\pi\right]$ 时,

$t \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{5}{2}\pi\right]$, 由题知, $\sin t=a$ 在区间

$\left[\frac{\pi}{3}, \frac{5}{2}\pi\right]$ 上恰有三个实数根 $t_1, t_2,$

$t_3 (t_1 < t_2 < t_3)$.

由函数 $y=\sin t$ 的图象(图略)知 $t_1+t_2=\pi, t_3=t_1+2\pi$, 则 $t_3-t_2-2t_1=(t_3-t_1)-(t_1+t_2)=\pi$, 故 $\left(2x_3+\frac{\pi}{6}\right)-\left(2x_2+\frac{\pi}{6}\right)-2\left(2x_1+\frac{\pi}{6}\right)=\pi$, 化简得 $x_3-x_2-2x_1=\frac{2\pi}{3}$, 则 $\sin(x_3-x_2-2x_1)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

5.4.3 正切函数的性质与图象



对点上分

1. B 【解析】当 $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ 时, $y=|\tan x -$

$\sin x| - \tan x - \sin x = \sin x - \tan x - \tan x -$



$\sin x = -2\tan x$, 此时函数单调递减, 且 $y \geq 0$, 可排除 C, D; 当 $x \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ 时, $y = |\tan x - \sin x| - \tan x - \sin x = \tan x - \sin x - \tan x - \sin x = -2\sin x$, 此时函数单调递增, 且 $0 < y < 2$, 可排除 A. 故选 B.

2. A 【解析】因为 $2x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$, 所以 $x \neq \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$, $k \in \mathbf{Z}$, 则函数 $f(x) = \tan 2x$ 的定义域为 $\left\{x \mid x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\right\}$. 故选 A.

3. $\left[k\pi - \frac{\pi}{3}, k\pi + \frac{\pi}{3}\right] (k \in \mathbf{Z})$ 【解析】要使 $f(x) = \sqrt{3 - \tan^2 x}$ 有意义, 则 $3 - \tan^2 x \geq 0$, 则 $-\sqrt{3} \leq \tan x \leq \sqrt{3}$, 解得 $k\pi - \frac{\pi}{3} \leq x \leq k\pi + \frac{\pi}{3}$, $k \in \mathbf{Z}$.

故函数 $f(x) = \sqrt{3 - \tan^2 x}$ 的定义域是 $\left[k\pi - \frac{\pi}{3}, k\pi + \frac{\pi}{3}\right] (k \in \mathbf{Z})$.

4. B 【解析】函数 $f(x) = \tan \frac{x}{2}$, 定义域为 $\{x \mid x \neq \pi + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$, 由 $f(-x) = \tan \frac{-x}{2} = -\tan \frac{x}{2} = -f(x)$ 知函数为奇函数, 其最小正周期 $T = \frac{\pi}{\frac{1}{2}} = 2\pi$. 故选 B.

5. BC 【解析】函数 $f(x) = \tan\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ 的最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$, A 错误;

由 $2x - \frac{\pi}{4} = \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$, 解得 $x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8}$, $k \in \mathbf{Z}$, 则函数 $f(x)$ 的图象的对称中

心是点 $\left(\frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8}, 0\right) (k \in \mathbf{Z})$, B 正确;

$$\begin{aligned} \text{由于 } & \left| f\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \right| \\ &= \left| \tan\left[2\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - \frac{\pi}{4}\right] \right| \\ &= \left| \tan\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \right| = |f(x)|, \end{aligned}$$

则直线 $x = \frac{\pi}{8}$ 是 $y = |f(x)|$ 图象的一条对称

轴, 又 $\left| f\left(-\frac{\pi}{4} - x\right) \right| = \left| \tan\left[2\left(-\frac{\pi}{4} - x\right) - \frac{\pi}{4}\right] \right|$



$\left| \tan\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \right| = |f(x)|$, 则直线 $x = -\frac{\pi}{8}$ 是 $y = |f(x)|$ 图象的一条对称轴, 而函数 $y = |f(x)|$ 的最小正周期是 $\frac{\pi}{2}$, 则直线 $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}, k \in \mathbf{Z}$ 及 $x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}, k \in \mathbf{Z}$ 都是 $y = |f(x)|$ 图象的对称轴, 所以函数 $y = |f(x)|$ 图象的对称轴是直线 $x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8} (k \in \mathbf{Z})$, C 正确;

由 $f(x) \geq \sqrt{3}$ 得 $\tan\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \geq \sqrt{3}$, 则 $k\pi + \frac{\pi}{3} \leq 2x - \frac{\pi}{4} < k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$, 解得 $\frac{k\pi}{2} + \frac{7\pi}{24} \leq x < \frac{k\pi}{2} + \frac{3\pi}{8}, k \in \mathbf{Z}$, 即不等式 $f(x) \geq \sqrt{3}$ 的解集是 $\left[\frac{k\pi}{2} + \frac{7\pi}{24}, \frac{k\pi}{2} + \frac{3\pi}{8}\right) (k \in \mathbf{Z})$, D 错误. 故选 BC.

6. A 【解析】因为 $\frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{7} < \frac{\pi}{2}$, 所以 $a = \sin \frac{3\pi}{7} > \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $b = \cos\left(-\frac{3\pi}{7}\right) = \cos \frac{3\pi}{7} < \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. 又 $a < \sin \frac{\pi}{2} = 1, c = \tan \frac{3\pi}{7} > \tan \frac{\pi}{4} = 1$, 所以 $b < a < c$. 故选 A.

7. $\left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{6}\right] (k \in \mathbf{Z})$ 【解析】因为 $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{3}\tan x}$, 所以 $1 - \sqrt{3}\tan x \geq 0$, 解得 $k\pi - \frac{\pi}{2} < x \leq k\pi + \frac{\pi}{6}, k \in \mathbf{Z}$.

当 $x \in \left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{6}\right] (k \in \mathbf{Z})$ 时, $y = \sqrt{1 - \sqrt{3}\tan x}$ 单调递增, 所以 $y = \sqrt{1 - \sqrt{3}\tan x}$ 单调递减, 即 $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{3}\tan x}$ 的单调递减区间为 $\left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{6}\right] (k \in \mathbf{Z})$.

8. $\left[\frac{3}{4}, +\infty\right)$ 【解析】设 $t = \tan x (t \in \mathbf{R})$, 则 $y = t^2 + t + 1 = \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$, 当 $t = -\frac{1}{2}$ 时, $y_{\min} = \frac{3}{4}$. 所以 $y = \tan^2 x + \tan x + 1$



1 的值域是 $\left[\frac{3}{4}, +\infty\right)$.

9. $\frac{\pi}{4}$ 【解析】令 $k\pi - \frac{\pi}{2} < \omega x < k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$, 得 $\frac{k\pi}{\omega} - \frac{\pi}{2\omega} < x < \frac{k\pi}{\omega} + \frac{\pi}{2\omega}, k \in \mathbf{Z}$.

因为 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left(\frac{k\pi}{4} - \frac{\pi}{8}, \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8}\right) (k \in \mathbf{Z})$, 所以 $\omega = 4$, 故 $g(x) = 2\sin\left(8x + \frac{\pi}{3}\right)$, 其最小正周期 $T = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$.

10. $\frac{\pi}{3}$ 【解析】取 $-\frac{\pi}{2} < 2x < \frac{\pi}{2}$, 解得

$-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$, 所以 $y = \tan 2x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ 上单调递增, 即 $f(x) = a - \sqrt{3} \tan 2x$

在 $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ 上单调递减, 因为 $f(x)$ 在

闭区间 $\left[-\frac{\pi}{6}, b\right]$ 上有最大值 7, 最小值

3, 所以 $-\frac{\pi}{6} < b < \frac{\pi}{4}$, 且 $f(b) = 3$,

$$f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 7, \text{ 即 } \begin{cases} a - \sqrt{3} \tan 2b = 3, \\ a - \sqrt{3} \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 7, \end{cases} \text{ 解}$$

$$\text{得 } \begin{cases} a = 4, \\ b = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}. \end{cases} \text{ 因为 } -\frac{\pi}{6} < b < \frac{\pi}{4},$$

所以 $b = \frac{\pi}{12}$, 故 $ab = \frac{\pi}{3}$.

5.4 节测上分

1. A 【解析】令 $2x + \frac{\pi}{6} = k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 得 $x =$

$-\frac{\pi}{12} + \frac{k}{2}\pi, k \in \mathbf{Z}$, 当 $k = 0$ 时, 对称中心

为点 $\left(-\frac{\pi}{12}, 0\right)$, 故 A 正确;

当 $k = 1$ 时, 对称中心为点 $\left(\frac{5\pi}{12}, 0\right)$, 当 $k =$

-1 时, 对称中心为点 $\left(-\frac{7\pi}{12}, 0\right)$, 故 B, C,

D 错误.

2. A 【解析】由 $e^x - 1 \neq 0$ 得 $x \neq 0$, 故函数的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 关于原点对称. 设 $f(x) = \cos x \cdot \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$, 则



$$f(-x) = \cos(-x) \cdot \frac{e^{-x}+1}{e^{-x}-1} = \cos x \cdot$$

$$\frac{1+e^x}{1-e^x} = -f(x), \text{ 所以 } f(x) \text{ 为奇函数, 函数}$$

图象关于原点中心对称, 排除 B, D.

$$\text{当 } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \text{ 时, } \cos x > 0, \frac{e^x+1}{e^x-1} > 0,$$

故 $f(x) > 0$, 选项 C 错误. 故选 A.

3. D 【解析】因为 $\frac{1}{2} = \ln \sqrt{e} < \ln 2 < \ln e = 1$,

$$\text{所以 } \frac{1}{2} < a < 1.$$

$$\text{因为 } \cos \frac{3}{2} < \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \text{ 所以 } b < \frac{1}{2}.$$

$$\text{因为 } 1 = 2^{\sin 0} < 2^{\sin \frac{1}{2}} < 2^{\sin \frac{\pi}{6}} = \sqrt{2}, \text{ 所以 } 1 < c < \sqrt{2}. \text{ 因此 } c > a > b, \text{ 故选 D.}$$

4. C 【解析】对于 $f(x) = \sqrt{\sin x - \sin^2 x} +$

$$\lg(2\cos 2x - 1), \text{ 有 } \begin{cases} \sin x - \sin^2 x \geq 0, \\ 2\cos 2x - 1 > 0, \end{cases} \text{ 由}$$

$$\sin x - \sin^2 x \geq 0, \text{ 得 } 0 \leq \sin x \leq 1, \text{ 解得}$$

$$2k_1\pi \leq x \leq \pi + 2k_1\pi, k_1 \in \mathbf{Z}, \text{ 由 } x \in [0,$$

$$2\pi), \text{ 得 } 0 \leq x \leq \pi.$$

$$\text{由 } 2\cos 2x - 1 > 0, \text{ 得 } \cos 2x > \frac{1}{2}, \text{ 则 } -\frac{\pi}{3} +$$

$$2k_2\pi < 2x < \frac{\pi}{3} + 2k_2\pi, k_2 \in \mathbf{Z}, \text{ 解得}$$

$$-\frac{\pi}{6} + k_2\pi < x < \frac{\pi}{6} + k_2\pi, k_2 \in \mathbf{Z}.$$

$$\text{又由 } x \in [0, 2\pi), \text{ 得 } 0 \leq x < \frac{\pi}{6} \text{ 或 } \frac{5\pi}{6} < x <$$

$$\frac{7\pi}{6} \text{ 或 } \frac{11\pi}{6} < x < 2\pi.$$

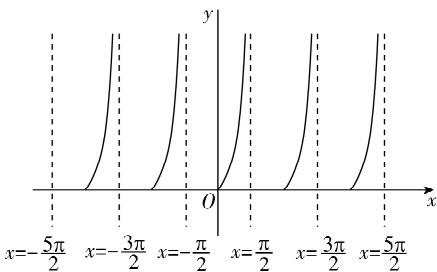
$$\text{综上, } 0 \leq x < \frac{\pi}{6} \text{ 或 } \frac{5\pi}{6} < x \leq \pi, \text{ 所以 } f(x) \text{ 的}$$

$$\text{定义域为 } \left[0, \frac{\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6}, \pi\right], \text{ 故选 C.}$$

5. D 【解析】 $f(x) = \tan x + |\tan x| =$

$$\begin{cases} 2\tan x, x \in \left[k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right), k \in \mathbf{Z}, \\ 0, x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, k\pi\right), k \in \mathbf{Z}, \end{cases}$$

$$\text{作出 } f(x) \text{ 的大致图象, 如图所示.}$$





对于 A, $f(x)$ 的最小正周期为 π , 故 A 错误;

对于 B, $f(x)$ 的值域为 $[0, +\infty)$, B 错误;

对于 C, $f(x)$ 的图象没有对称中心, C 错误;

对于 D, 不等式 $f(x) > 2\sqrt{3}$, 即 $x \in \left[k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right) (k \in \mathbf{Z})$ 时, $2\tan x > 2\sqrt{3}$, 得 $\tan x > \sqrt{3}$, 解得 $\frac{\pi}{3} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 所以 $f(x) > 2\sqrt{3}$ 的解集为 $\left(\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right) (k \in \mathbf{Z})$, 故 D 正确. 故选 D.

6. D 【解析】由 $-1 \leq 2a+1 \leq 3$ 得 $-1 \leq a \leq 1$.

设 $g(x) = f(x+1)$, 则 $g(x) =$

$$\sin \frac{\pi(x+1)}{2} - x^2 = \cos \frac{\pi x}{2} - x^2, x \in [-2,$$

2], 显然 $g(x)$ 为偶函数, 由于函数

$$y = \cos \frac{\pi x}{2}, y = -x^2 \text{ 在 } [0, 2] \text{ 上单调递减,}$$

所以 $g(x)$ 在 $[0, 2]$ 上单调递减.

由 $f(2a+1) < -1 = f(2)$, 得 $g(2a) < g(1)$,

故 $g(|2a|) < g(1)$.

$$\text{故 } \begin{cases} -1 \leq a \leq 1, \\ |2a| > 1, \end{cases} \text{ 解得 } \frac{1}{2} < a \leq 1 \text{ 或 } -1 \leq a <$$

$$-\frac{1}{2}. \text{ 故选 D.}$$

7. D 【解析】对于 A, 函数 $f(x) = \sin(\cos x) + \cos(\sin x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , 因为 $f(-x) = \sin[\cos(-x)] + \cos[\sin(-x)] = \sin(\cos x) + \cos(\sin x) = f(x)$, 所以 $f(x)$ 为偶函数, A 错误.

对于 B, 当 $x \in \mathbf{R}$ 时, $-1 \leq \sin x \leq 1$, $-1 \leq \cos x \leq 1$, 则 $\cos 1 \leq \cos(\sin x) \leq 1$, 当且仅当 $x = 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$ 时, $\cos(\sin x)$ 取得最大值 1; 又 $-\sin 1 \leq \sin(\cos x) \leq \sin 1$, 当且仅当 $x = 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$ 时, $\sin(\cos x)$ 取得最大值 $\sin 1$. 所以 $f(x)$ 的最大值为 $1 + \sin 1$, B 错误.

对于 C, 对于 $x \in \mathbf{R}, f(x+\pi) = \sin[\cos(x+\pi)] + \cos[\sin(x+\pi)] = -\sin(\cos x) + \cos(\sin x)$ 不能恒等于 $f(x)$, C 错误.



对于 D, 当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $t = \cos x$ 单调递减, 且 $0 < \cos x < 1$, 此时 $y = \sin t$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 则由复合函数的单调性知, $y = \sin(\cos x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减;

又当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $u = \sin x$ 单调递增, 且 $0 < \sin x < 1$, 此时 $y = \cos u$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 则由复合函数的单调性知, $y = \cos(\sin x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减.

综上所述, 函数 $f(x)$ 在区间 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减, 故 D 正确.

8. ACD 【解析】对于 A, 函数 $f(x) =$

$\cos\left(\omega x + \frac{\pi}{4}\right)$ ($0 < \omega < 4$) 的图象关于直

线 $x = \frac{3\pi}{8}$ 对称, 则 $\frac{3\pi}{8}\omega + \frac{\pi}{4} = k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 即

$\omega = \frac{8k-2}{3}, k \in \mathbf{Z}$, 因为 $0 < \omega < 4$, 所以取 $k =$

1, 则 $\omega = 2$, 故 A 正确;

对于 B, $f(x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$, 令 $f(x) = 0$,

得 $2x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbf{Z}$, 所以 $x = \frac{\pi}{8} +$

$\frac{n\pi}{2}, n \in \mathbf{Z}$, 当 $n = -1$ 时, $x = -\frac{3\pi}{8} < 0$, 当 $n =$

0 时, $x = \frac{\pi}{8}$, 当 $n = 1$ 时, $x = \frac{5\pi}{8} > \frac{3\pi}{8}$, 所

以 $f(x)$ 在区间 $\left(0, \frac{3\pi}{8}\right)$ 上只有 1 个零点,

故 B 错误;

对于 C, 因为 $f\left(x - \frac{3\pi}{8}\right) = \cos\left[2\left(x - \frac{3\pi}{8}\right) + \frac{\pi}{4}\right] = \cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin 2x$, 所

以 $f\left(x - \frac{3\pi}{8}\right)$ 为奇函数, 故 C 正确;

对于 D, 当 $x \in \left(\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}\right)$ 时, $2x + \frac{\pi}{4} \in$

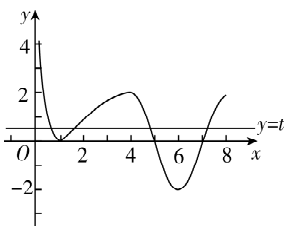
$\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, 因为 $y = \cos x$ 在 $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 上单

调递减, 所以 $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}\right)$ 上单

调递减, 故 D 正确. 故选 ACD.

9. AC 【解析】画出函数 $f(x)$ 与 $y = t$ 的大

致图象, 如图所示.



当 $0 < t < 2$ 时, 方程存在 4 个不同的解,

$$\frac{1}{4} < x_1 < 1 < x_2 < 4, 4 < x_3 < 5, 7 < x_4 < 8.$$

由 $|\log_2 x_1| = |\log_2 x_2|$ 得 $-\log_2 x_1 = \log_2 x_2$,

则 $x_1 x_2 = 1$, 由余弦函数的对称性知

$$x_3 + x_4 = 12, \text{ 所以 } \frac{x_3 x_4}{x_1 x_2} = x_3 x_4 = x_3 (12 -$$

$$x_3) = -(x_3 - 6)^2 + 36, 4 < x_3 < 5, y = -(x - 6)^2 + 36 \text{ 在 } (4, 5) \text{ 上单调递增, 所以 } 32 <$$

$$\frac{x_3 x_4}{x_1 x_2} < 35.$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = x_1 + \frac{1}{x_1} + 12, \frac{1}{4} < x_1 < 1, \text{ 因}$$

$$\text{为 } y = x + \frac{1}{x} + 12 \text{ 在 } \left(\frac{1}{4}, 1\right) \text{ 上单调递减,}$$

$$\text{所以 } 14 < x_1 + x_2 + x_3 + x_4 < \frac{65}{4}, \text{ 故 } x_1 +$$

$$x_2 + x_3 + x_4 \text{ 无最小值, 故选 AC.}$$

10.2 【解析】由 $f(x) \leq f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ 对任意的实

数 x 都成立, 可知 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ 是函数 $f(x)$ 的

最大值, 当 $x = \frac{\pi}{3}$ 时, $\frac{\pi}{3}\omega - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} +$

$2k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 解得 $\omega = 6k + 2, k \in \mathbf{Z}$, 又因为

$\omega > 0$, 所以 ω 的最小值为 2.

11. $\frac{4}{3} \quad \frac{5}{2}$ 【解析】因为函数 $f(x) =$

$2\sin 3\omega x (\omega > 1)$ 的最小正周期为 $\frac{2\pi}{3\omega} =$

$$\frac{\pi}{2}, \text{ 所以 } \omega = \frac{4}{3}.$$

因为 $f(x)$ 的一个单调递增区间为 $\left[\alpha,$

$\frac{\pi}{3}\right]$, 一个单调递减区间为 $\left[\frac{\pi}{3}, \beta\right)$,

所以 $x = \frac{\pi}{3}$ 时函数 $f(x)$ 取得最大值, 即

$$3\omega \times \frac{\pi}{3} = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}, \text{ 即 } \omega = 2k +$$

$$\frac{1}{2}, k \in \mathbf{Z}.$$

又因为 $\beta - \alpha \geq \frac{\pi}{6}$, 所以 $T = \frac{2\pi}{3\omega} \geq \frac{\pi}{6}$, 解



得 $\omega \leq 4$. 又 $\omega > 1$, 所以 $1 < \omega \leq 4$, 所以

当 $k=1$ 时, $\omega = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$.

12. 【解】 (1) 令 $-\frac{\pi}{2} + k\pi < 2x - \frac{\pi}{4} <$

$\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 解得 $-\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{8} +$

$\frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$, 所以函数 $f(x)$ 的单调递增区

间为 $\left(-\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, \frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}\right) (k \in \mathbf{Z})$, 无

单调递减区间.

(2) 由 (1) 得, 函数 $f(x)$ 在区间

$\left[0, \frac{\pi}{4}\right)$ 内单调递增, 则当 $x \in \left[0,$

$\frac{\pi}{4}\right)$ 时, $f(0) \leq f(x) < f\left(\frac{\pi}{4}\right)$, 即 -1

$\leq f(x) < 1$, 因此 $M = \{y \mid -1 \leq y < 1\}$,

由 $x \in [0, 6)$ 得 $0 \leq \frac{\pi}{6}x < \pi$, 由 \tan

$\frac{\pi}{6}x \geq \frac{\sqrt{3}}{3}$ 得 $\frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{6}x < \frac{\pi}{2}$, 解得 $1 \leq x <$

3 , 因此 $N = \{x \mid 1 \leq x < 3\}$, 所以 $M \cup$

$N = [-1, 3)$.

13. 【解】 (1) 由 $\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{3\pi}{2} +$

$2k\pi (k \in \mathbf{Z})$, 得 $\frac{\pi}{6} + k\pi \leq x \leq \frac{2\pi}{3} +$

$k\pi (k \in \mathbf{Z})$, 所以 $f(x)$ 的单调递减区间

为 $\left[\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{2\pi}{3} + k\pi\right] (k \in \mathbf{Z})$.

(2) 由 $x \in \left[0, \frac{5\pi}{12}\right]$, 得 $2x + \frac{\pi}{6} \in$

$\left[\frac{\pi}{6}, \pi\right]$.

由正弦函数的图象可得 $f(x)$ 在

$\left[0, \frac{5\pi}{12}\right]$ 上的最大值为 $\frac{1}{4}\sin \frac{\pi}{2} = \frac{1}{4}$,

最小值为 $\frac{1}{4}\sin \pi = 0$,

所以 $f(x)$ 在 $\left[0, \frac{5\pi}{12}\right]$ 上的值域

为 $\left[0, \frac{1}{4}\right]$.

(3) 由 $g(x) = f(x) - \frac{1}{8} = 0$ 得 $\sin\left(2x +$

$\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$, 则 $2x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$



或 $2x + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$, 解得

$x = k\pi (k \in \mathbf{Z})$ 或 $x = \frac{\pi}{3} + k\pi (k \in \mathbf{Z})$, 则

$g(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{12}, m + \frac{\pi}{12}\right]$ 上的 3 个零点为

$\frac{\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}$, 所以 $\frac{4\pi}{3} \leq m + \frac{\pi}{12} < 2\pi$, 得

$\frac{5\pi}{4} \leq m < \frac{23\pi}{12}$, 即 m 的取值范围

为 $\left[\frac{5\pi}{4}, \frac{23\pi}{12}\right)$.

14.



思路导引

(1) 结合不等式的性

质求当 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 时, $2x - \frac{3\pi}{4}$ 的范围,

结合余弦函数的性质及不等式的性质可求 $f(x)$ 的最大值;

(2) 令 $g(x) = 2\cos\left(2x - \frac{3\pi}{4}\right) - 3, x \in$

$\left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{8}\right]$, 不等式 $f(x) + m < -1$ 在 $x \in$

$\left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{8}\right]$ 内的解集为空集可转化

为 $m \geq g(x)_{\max}$ 恒成立, 求函数 $g(x)$ 的最大值即可得解.

【解】(1) 由 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 得 $-\frac{3\pi}{4} \leq 2x -$

$\frac{3\pi}{4} \leq \frac{\pi}{4}$, 所以 $-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \cos\left(2x - \frac{3\pi}{4}\right) \leq 1$,

所以 $0 \leq -2\cos\left(2x - \frac{3\pi}{4}\right) + 2 \leq 2 + \sqrt{2}$,

则函数 $f(x)$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 内的最大值

为 $\sqrt{2} + 2$, 此时 $x = 0$.

(2) 因为不等式 $f(x) + m < -1$ 在 $x \in$

$\left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{8}\right]$ 内的解集为空集, 所以 $m <$

$2\cos\left(2x - \frac{3\pi}{4}\right) - 3$ 在 $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{8}\right]$ 内的

解集为空集, 令 $g(x) = 2\cos\left(2x - \frac{3\pi}{4}\right) -$

$3, x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{8}\right]$, 则 $m \geq g(x)_{\max}$,

当 $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{5\pi}{8}$ 时, $-\frac{\pi}{4} \leq 2x - \frac{3\pi}{4} \leq \frac{\pi}{2}$,

则 $0 \leq \cos\left(2x - \frac{3\pi}{4}\right) \leq 1, -3 \leq g(x) \leq -1$.

故实数 m 的取值范围为 $[-1, +\infty)$.



5.5 三角恒等变换

5.5.1 两角和与差的正弦、余弦和正切公式

课时1 两角和与差的正弦、余弦和正切公式



对点上分

1. A 【解析】 $\cos 17^\circ \sin 13^\circ + \sin 17^\circ \cos 13^\circ =$

$$\sin(13^\circ + 17^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \text{ 故选 A.}$$

2. C 【解析】 $\frac{1}{2} \cos 75^\circ - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 75^\circ$

$$= \cos 60^\circ \cos 75^\circ - \sin 60^\circ \sin 75^\circ$$

$$= \cos(60^\circ + 75^\circ) = \cos 135^\circ$$

$$= -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

一题多解

$$\frac{1}{2} \cos 75^\circ - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 75^\circ$$

$$= \sin 30^\circ \cos 75^\circ - \cos 30^\circ \sin 75^\circ$$

$$= \sin(30^\circ - 75^\circ) = \sin(-45^\circ)$$

$$= -\sin 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

3. D 【解析】因为 $\tan 135^\circ = \tan(100^\circ +$

$$35^\circ) = \frac{\tan 100^\circ + \tan 35^\circ}{1 - \tan 100^\circ \tan 35^\circ} = -1, \text{ 所以}$$

$$-\tan 100^\circ - \tan 35^\circ + \tan 100^\circ \cdot \tan 35^\circ =$$

$$1, \text{ 所以 } (1 - \tan 100^\circ)(1 - \tan 35^\circ) = 1 -$$

$$\tan 100^\circ - \tan 35^\circ + \tan 100^\circ \tan$$

$$35^\circ = 1 + 1 = 2. \text{ 故选 D.}$$

4. D 【解析】因为 $\tan \alpha = 13, \tan \beta = 7$, 所

$$\text{以 } \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} =$$

$$\frac{13+7}{1-13 \times 7} = -\frac{2}{9}.$$

5. B 【解析】因为 α, β 都是锐角, 所以 $0 <$

$$\alpha < \frac{\pi}{2}, 0 < \beta < \frac{\pi}{2}, \text{ 则 } 0 < \alpha + \beta < \pi,$$

$$\text{又 } \sin \alpha = \frac{4}{5}, \cos(\alpha + \beta) = \frac{5}{13},$$

$$\text{所以 } \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{3}{5}, \sin(\alpha + \beta) =$$

$$\sqrt{1 - \cos^2(\alpha + \beta)} = \frac{12}{13},$$

$$\text{则 } \sin \beta = \sin(\alpha + \beta - \alpha) = \sin(\alpha + \beta) \cos \alpha -$$

$$\cos(\alpha + \beta) \sin \alpha = \frac{12}{13} \times \frac{3}{5} - \frac{5}{13} \times \frac{4}{5} = \frac{16}{65}.$$



故选 B.

6. C 【解析】 $\because \alpha, \beta$ 均为锐角, 且 $\cos \alpha =$

$$\frac{\sqrt{10}}{10}, \sin \beta = \frac{2\sqrt{5}}{5},$$

$$\therefore \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{10}}{10}\right)^2} =$$

$$\frac{3\sqrt{10}}{10}, \cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta} = \sqrt{1 - \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2} =$$

$$\frac{\sqrt{5}}{5},$$

$$\therefore \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta =$$

$$\frac{\sqrt{10}}{10} \times \frac{\sqrt{5}}{5} - \frac{3\sqrt{10}}{10} \times \frac{2\sqrt{5}}{5} = -\frac{\sqrt{2}}{2}. \text{ 故选 C.}$$

7. B 【解析】因为 $\cos(\alpha + \beta) = \frac{1}{5}, \sin(\alpha -$

$$\beta) = \frac{3}{5}, \text{ 所以 } \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha - \beta)} =$$

$$\frac{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta}{\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta} = \frac{1}{3},$$

分子分母同时除以 $\cos \alpha \cos \beta$ 得,

$$\frac{1 - \tan \alpha \tan \beta}{\tan \alpha - \tan \beta} = \frac{1}{3} \text{ ①.}$$

因为 $0 < \beta < \alpha < \frac{\pi}{2}$, 所以 $0 < \alpha - \beta < \frac{\pi}{2}$, 所

$$\text{以 } \cos(\alpha - \beta) = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5},$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha - \beta)} = \frac{3}{4},$$

$$\text{所以 } \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} = \frac{3}{4} \text{ ②.}$$

$$\text{联立①②, 可得 } \tan \alpha \tan \beta = \frac{3}{5}.$$

故选 B.

8. $\frac{\pi}{4}$



攻略上分

由 $\cos \beta = \frac{3\sqrt{10}}{10}$ 及 β

为锐角求出 $\sin \beta, \tan \beta$, 利用两角和的正切公式求出 $\tan(\alpha + \beta)$ 的值, 结合 α, β 为锐角, 得到 $\alpha + \beta$ 的值.

【解析】因为 $\cos \beta = \frac{3\sqrt{10}}{10}, \beta$ 为锐角, 所

$$\text{以 } \sin \beta = \sqrt{1 - \left(\frac{3\sqrt{10}}{10}\right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{10}, \tan \beta =$$

$$\frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{\frac{\sqrt{10}}{10}}{\frac{3\sqrt{10}}{10}} = \frac{1}{3}, \text{ 可得 } \tan(\alpha + \beta) =$$



$$\frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}} = 1, \text{ 又 } \alpha, \beta \text{ 为锐角, 所以 } \alpha + \beta \in (0, \pi), \text{ 所以 } \alpha + \beta = \frac{\pi}{4}.$$

9. $\frac{7\pi}{4}$ 【解析】因为 $\alpha \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$, 所以

$$2\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right], \text{ 则 } \cos 2\alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 2\alpha} = -\sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

$$\text{因为 } \sin(\beta - \alpha) = \frac{\sqrt{10}}{10}, \beta \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right], \alpha \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right], \text{ 所以 } \beta - \alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{5}{4}\pi\right],$$

$$\text{所以 } \cos(\beta - \alpha) = -\sqrt{1 - \sin^2(\beta - \alpha)} = -\sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{10}}{10}\right)^2} = -\frac{3\sqrt{10}}{10}.$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } \cos(\alpha + \beta) &= \cos[(\beta - \alpha) + 2\alpha] \\ &= \cos(\beta - \alpha) \cos 2\alpha - \sin(\beta - \alpha) \sin 2\alpha \\ &= \left(-\frac{3\sqrt{10}}{10}\right) \times \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) - \frac{\sqrt{10}}{10} \times \frac{\sqrt{5}}{5} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{因为 } \alpha \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right], \beta \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right],$$

$$\text{所以 } \alpha + \beta \in \left[\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right], \text{ 所以 } \alpha + \beta = \frac{7\pi}{4}.$$

10. B 【解析】因为 $\cos \alpha + \sqrt{3} \sin \alpha = \frac{8}{5}$, 所以

$$\frac{1}{2} \cos \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{4}{5}. \text{ 故选 B.}$$

11. B 【解析】 $\because 2\sin \beta - \cos \alpha = 1$,

$$\therefore 2\sin \beta = 1 + \cos \alpha, \text{ 得 } 4\sin^2 \beta = 1 + 2\cos \alpha + \cos^2 \alpha \text{ ①.}$$

$$\because \sin \alpha + 2\cos \beta = \sqrt{3}, \therefore 2\cos \beta = \sqrt{3} - \sin \alpha, \text{ 得 } 4\cos^2 \beta = 3 - 2\sqrt{3} \sin \alpha + \sin^2 \alpha \text{ ②.}$$

$$\begin{aligned} \text{由 ①+② 得, } 4 &= 5 + 2\cos \alpha - 2\sqrt{3} \sin \alpha = \\ &= 5 + 4\left(\frac{1}{2} \cos \alpha - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha\right) = 5 + 4\sin\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right), \text{ 即 } \sin\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) = -\frac{1}{4}, \\ \therefore \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) &= \sin\left[\frac{\pi}{2} - \left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)\right] = \end{aligned}$$



$$\sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=-\frac{1}{4}. \text{ 故选 B.}$$



能力上分

1. A 【解析】原式 $= \sin 110^\circ \cos 40^\circ - \cos 70^\circ \sin 40^\circ = \sin 70^\circ \cos 40^\circ - \cos 70^\circ \times \sin 40^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$.

一题多解

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \sin 110^\circ \cos 40^\circ - \cos 70^\circ \sin 40^\circ = \cos 20^\circ \cos 40^\circ - \sin 20^\circ \sin 40^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

2. C 【解析】由于 $3\cos \alpha + \sqrt{10}\cos \beta = \frac{8}{5}$,

$$3\sin \alpha - \sqrt{10}\sin \beta = \frac{6}{5}, \text{ 故两式平方后相}$$

$$\text{加可得 } 9 + 10 + 6\sqrt{10}\cos \alpha \cos \beta -$$

$$6\sqrt{10}\sin \alpha \sin \beta = 4, \text{ 所以 } \cos \alpha \cos \beta -$$

$$\sin \alpha \sin \beta = -\frac{15}{6\sqrt{10}} = -\frac{\sqrt{10}}{4}, \text{ 即 } \cos(\alpha +$$

$$\beta) = -\frac{\sqrt{10}}{4}.$$

3. D 【解析】因为 $\tan \alpha + \tan \beta = \frac{4}{3}$, 所

$$\text{以 } \cos \alpha \neq 0, \cos \beta \neq 0, \text{ 又因为 } \sin(\alpha +$$

$$\beta) = 2\cos(\alpha - \beta), \text{ 所以 } \sin \alpha \cos \beta +$$

$$\cos \alpha \sin \beta = 2\cos \alpha \cos \beta + 2\sin \alpha \sin \beta \text{ ①,}$$

$$\text{①式的两边同时除以 } \cos \alpha \cos \beta, \text{ 可得}$$

$$\tan \alpha + \tan \beta = 2 + 2\tan \alpha \tan \beta, \text{ 又 } \tan \alpha +$$

$$\tan \beta = \frac{4}{3}, \text{ 所以 } \tan \alpha \tan \beta = -\frac{1}{3}.$$

一题多解

$$\text{因为 } \tan \alpha + \tan \beta = \frac{4}{3}, \text{ 所}$$

$$\text{以 } \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{4}{3}, \text{ 所以 } \sin(\alpha + \beta) =$$

$$\frac{4}{3}\cos \alpha \cos \beta.$$

$$\text{又因为 } \sin(\alpha + \beta) = 2\cos(\alpha - \beta), \text{ 所以}$$

$$\frac{4}{3}\cos \alpha \cos \beta = 2\cos \alpha \cos \beta +$$

$$2\sin \alpha \sin \beta, \text{ 所以 } -\frac{2}{3}\cos \alpha \cos \beta =$$

$$2\sin \alpha \sin \beta, \text{ 所以 } \tan \alpha \tan \beta = -\frac{1}{3}.$$

4. D 【解析】 $\tan \theta = \frac{\cos \frac{7\pi}{10} + \sin \frac{7\pi}{10}}{\cos \frac{7\pi}{10} - \sin \frac{7\pi}{10}}$



$$\begin{aligned}
 &= \frac{1 + \tan \frac{7\pi}{10}}{1 - \tan \frac{7\pi}{10}} = \frac{\tan \frac{\pi}{4} + \tan \frac{7\pi}{10}}{1 - \tan \frac{\pi}{4} \tan \frac{7\pi}{10}} \\
 &= \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{7\pi}{10} \right) = \tan \frac{19\pi}{20}.
 \end{aligned}$$

又 $\theta \in (0, 2\pi)$, 所以 $\theta = \frac{19\pi}{20}$ 或 $\theta = \frac{39\pi}{20}$,

故选 D.

5. B 【解析】已知 $\alpha \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6} \right)$, 那么 $\alpha +$

$$\frac{\pi}{6} \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi \right).$$

$$\begin{aligned}
 &\text{因为 } \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ 所以 } \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{6} \right) \\
 &= -\sqrt{1 - \sin^2 \left(\alpha + \frac{\pi}{6} \right)} = \\
 &= -\sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \right)^2} = -\sqrt{1 - \frac{1}{3}} = -\sqrt{\frac{2}{3}} = \\
 &= -\frac{\sqrt{6}}{3}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \cos \alpha &= \cos \left[\left(\alpha + \frac{\pi}{6} \right) - \frac{\pi}{6} \right] = \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{6} \right) \cos \frac{\pi}{6} + \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{6} \right) \sin \frac{\pi}{6},
 \end{aligned}$$

$$\text{把 } \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{6} \right) = -\frac{\sqrt{6}}{3}, \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\sin \left(\alpha + \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt{3}}{3}, \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \text{ 代入上式得}$$

$$\cos \alpha = -\frac{\sqrt{6}}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3} - 3\sqrt{2}}{6}. \text{ 故}$$

选 B.

6. B 【解析】因为 α 是锐角, 所以 $0 < \alpha <$

$$\frac{\pi}{2}, \text{ 所以 } \frac{\pi}{3} < \alpha + \frac{\pi}{3} < \frac{5\pi}{6},$$

$$\text{因为 } \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{3} > 0, \text{ 所以 } \frac{\pi}{3} < \alpha +$$

$$\frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{2}, \text{ 所以 } \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{3} \right) = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

$$\text{因为 } \beta \text{ 是锐角, 所以 } 0 < \beta < \frac{\pi}{2}, \text{ 所以 } -\frac{\pi}{3} <$$

$$\beta - \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{6},$$

$$\text{因为 } \sin \left(\beta - \frac{\pi}{3} \right) = -\frac{\sqrt{5}}{5} < 0, \text{ 所以 } -\frac{\pi}{3} < \beta -$$

$$\frac{\pi}{3} < 0, \text{ 所以 } \cos \left(\beta - \frac{\pi}{3} \right) = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

$$\text{因为 } \left(\alpha + \frac{\pi}{3} \right) + \left(\beta - \frac{\pi}{3} \right) = \alpha + \beta, \text{ 所}$$



$$\begin{aligned} \text{以 } \cos(\alpha + \beta) &= \cos \left[\left(\alpha + \frac{\pi}{3} \right) + \left(\beta - \frac{\pi}{3} \right) \right] = \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{3} \right) \cos \left(\beta - \frac{\pi}{3} \right) - \\ \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{3} \right) \sin \left(\beta - \frac{\pi}{3} \right) &= \frac{2\sqrt{5} + 2\sqrt{10}}{15}. \end{aligned}$$

方法总结 常用的角的代换形式

$$\textcircled{1} \alpha = (\alpha + \beta) - \beta; \textcircled{2} \alpha = \beta - (\beta - \alpha);$$

$$\textcircled{3} \alpha = \frac{1}{2} [(\alpha + \beta) + (\alpha - \beta)]; \textcircled{4} \alpha =$$

$$\frac{1}{2} [(\alpha + \beta) - (\beta - \alpha)]; \textcircled{5} \frac{\alpha + \beta}{2} =$$

$$\left(\alpha - \frac{\beta}{2} \right) - \left(\frac{\alpha}{2} - \beta \right); \textcircled{6} \alpha - \gamma = (\alpha -$$

$$\beta) + (\beta - \gamma).$$

7. AC 【解析】 $f(x) = |\sin x + \sqrt{3} \cos x| =$

$$\left| 2\sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \right|, y = 2\sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \text{ 的最小}$$

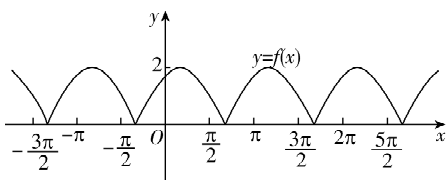
正周期 $T = 2\pi$, 而 $f(x) =$

$$\left| 2\sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \right| \text{ 的图象是由 } y = 2\sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right)$$

的图象将 x 轴下方的部分关于 x 轴

对称向上翻折, x 轴及 x 轴上方部分不

变, 则 $f(x)$ 的图象如图所示.



结合图象可知 $f(x) = \left| 2\sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \right|$ 的

最小正周期为 $\frac{1}{2}T = \pi$, 故 A 正确.

因为 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left| 2\sin \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} \right) \right| = 1$, 所以

直线 $x = \frac{\pi}{2}$ 不是 $f(x)$ 图象的对称轴, 故 B

错误.

因为 $\sin x \in [-1, 1]$, 所以 $2\sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \in [-2, 2]$, 所以 $f(x) = \left| 2\sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \right| \in [0, 2]$, 故 $f(x)$ 的值域为 $[0,$

$2]$, 故 C 正确.

因为 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \left| 2\sin \left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3} \right) \right| = 2$, 所以

直线 $x = \frac{2\pi}{3}$ 是 $f(x)$ 图象的对称轴, 故 D 正确.



$$\left. \frac{\pi}{3} \right) \Big| = 0, f(\pi) = \left| 2\sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) \right| = \sqrt{3},$$

所以 $f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ 上不单调, 故 D 错误. 故选 AC.

8. 二 【解析】依题意, $\sin(\alpha - \beta) + \sqrt{3}\cos(\alpha - \beta)$

$$\beta) = 2\left[\frac{1}{2}\sin(\alpha - \beta) + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(\alpha - \beta)\right]$$

$$= 2\sin\left(\alpha - \beta + \frac{\pi}{3}\right) = 2\sin\left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right), \text{ 所以}$$

$$\alpha - \beta + \frac{\pi}{3} = \alpha - \frac{\beta}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z} \text{ 或 } \alpha - \beta +$$

$$\frac{\pi}{3} = 2k'\pi + \pi - \left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right), k' \in \mathbf{Z}.$$

$$\text{当 } \alpha - \beta + \frac{\pi}{3} = \alpha - \frac{\beta}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z} \text{ 时, 解得}$$

$$\beta = \frac{2\pi}{3} - 4k\pi, k \in \mathbf{Z};$$

$$\text{当 } \alpha - \beta + \frac{\pi}{3} = 2k'\pi + \pi - \left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right), k' \in \mathbf{Z}$$

$$\text{时, 解得 } 2\alpha - \frac{3\beta}{2} = 2k'\pi + \frac{2\pi}{3}, k' \in \mathbf{Z}, \text{ 因为}$$

β 为定值, 所以此时不符合题意.

综上所述, β 为第二象限角.

9. $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ 【解析】依题意, $\tan(\alpha - \beta) =$

$$\frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} = \frac{4}{1 + \sqrt{2} - 1} = 2\sqrt{2} > 0,$$

$$\text{因为 } 2k_1\pi < \alpha < 2k_1\pi + \frac{\pi}{2}, k_1 \in \mathbf{Z}, 2k_2\pi +$$

$$\pi < \beta < 2k_2\pi + \frac{3\pi}{2}, k_2 \in \mathbf{Z},$$

$$\text{所以 } -2k_2\pi - \frac{3}{2}\pi < -\beta < -2k_2\pi - \pi, k_2 \in \mathbf{Z},$$

$$\text{所以 } 2(k_1 - k_2)\pi - \frac{3}{2}\pi < \alpha - \beta < 2(k_1 -$$

$$k_2)\pi - \frac{\pi}{2}, \text{ 又 } \tan(\alpha - \beta) > 0,$$

$$\text{所以 } 2(k_1 - k_2)\pi - \pi < \alpha - \beta < 2(k_1 - k_2)\pi -$$

$$\frac{\pi}{2}, k_1, k_2 \in \mathbf{Z}, \text{ 所以 } \sin(\alpha - \beta) = -\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

课时2 二倍角的正弦、 余弦、正切公式



对点上分

1. C 【解析】 $\frac{\tan 37.5^\circ}{1 - \tan^2 37.5^\circ} = \frac{1}{2} \times$

$$\frac{2\tan 37.5^\circ}{1 - \tan^2 37.5^\circ} = \frac{1}{2} \tan 75^\circ = \frac{1}{2} \tan(45^\circ +$$



$$30^\circ) = \frac{1}{2} \times \frac{\tan 45^\circ + \tan 30^\circ}{1 - \tan 45^\circ \tan 30^\circ} = \frac{1}{2} \times$$

$$\frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{1}{2} \times \frac{3 + \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}. \text{ 故选 C.}$$

2. D 【解析】 $\cos 72^\circ \sin 54^\circ \sin 30^\circ$

$$= \frac{1}{2} \cos 72^\circ \cos 36^\circ$$

$$= \frac{2 \sin 36^\circ \cos 36^\circ \cos 72^\circ}{4 \sin 36^\circ}$$

$$= \frac{\sin 72^\circ \cos 72^\circ}{4 \sin 36^\circ} = \frac{\sin 144^\circ}{8 \sin 36^\circ} = \frac{\sin 36^\circ}{8 \sin 36^\circ}$$

$$= \frac{1}{8}. \text{ 故选 D.}$$

3. BD 【解析】对于 A, 易知 $\cos 72^\circ \cos 12^\circ -$

$$\sin 72^\circ \sin 12^\circ = \cos(72^\circ + 12^\circ) = \cos 84^\circ \neq$$

$$\frac{1}{2}, \text{ 故 A 错误;}$$

$$\text{对于 B, 易知 } \sin 15^\circ \cos 15^\circ = \frac{1}{2} \times$$

$$2 \sin 15^\circ \cos 15^\circ = \frac{1}{2} \sin 30^\circ = \frac{1}{4}, \text{ 故 B}$$

正确;

$$\text{对于 C, 易知 } \cos^4 15^\circ - \sin^4 15^\circ = (\cos^2 15^\circ + \sin^2 15^\circ)(\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ) = \cos^2 15^\circ -$$

$$\sin^2 15^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 故 C 错误;}$$

$$\text{对于 D, } \frac{\tan \frac{\pi}{8}}{1 - \tan^2 \frac{\pi}{8}} = \frac{1}{2} \times \frac{2 \tan \frac{\pi}{8}}{1 - \tan^2 \frac{\pi}{8}} =$$

$$\frac{1}{2} \tan \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}, \text{ 故 D 正确. 故选 BD.}$$

4. A 【解析】由题意知 $\theta - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4} +$

$$k\pi, k \in \mathbf{Z}, \text{ 得 } \theta = \frac{5\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbf{Z}, \text{ 故}$$

$$\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2} \sin 2\theta = \frac{1}{2} \sin$$

$$\left(\frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right) = \frac{1}{2} \sin \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{4}. \text{ 故选 A.}$$

5. B 【解析】 $5 \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\alpha + \frac{5\pi}{4}\right)$



$$\begin{aligned}
 &= -5 \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) \\
 &= -5 \left(\sin \alpha \cos \frac{\pi}{4} - \cos \alpha \sin \frac{\pi}{4} \right) \cdot \\
 &\quad \left(\cos \alpha \cos \frac{\pi}{4} - \sin \alpha \sin \frac{\pi}{4} \right) \\
 &= \frac{5}{2} (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = \frac{5}{2} (1 - \sin 2\alpha) = 1, \\
 &\text{解得 } \sin 2\alpha = \frac{3}{5}, \text{ 故选 B.}
 \end{aligned}$$

6. A 【解析】因为 $\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha$, $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$, 所以 $3\sin 2\alpha = \cos 2\alpha + 1$ 可化为 $6\sin \alpha \cos \alpha = 2\cos^2 \alpha$,
 因为 $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 所以 $\cos \alpha \neq 0$, 所以
 $3\sin \alpha = \cos \alpha$, 结合 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, 得
 $10 \sin^2 \alpha = 1$, 因为 $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 所以
 $\sin \alpha > 0$, 所以 $\sin \alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$. 故选 A.

7. B 【解析】 $\cos(\pi - 2\alpha) = -\cos 2\alpha = -(1 - 2\sin^2 \alpha) = 2\sin^2 \alpha - 1 = \frac{7}{25}$. 故选 B.

8. C 【解析】因为 α 是第三象限角, 所以
 $\alpha \in \left(\pi + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbf{Z}$, 则 $\frac{\alpha}{2} \in$
 $\left(\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{3\pi}{4} + k\pi\right)$, $k \in \mathbf{Z}$, 即 $\frac{\alpha}{2}$ 为第二
 象限角或第四象限角, $\tan \frac{\alpha}{2} < 0$.

又 $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$, α 是第三象限角, 所

以 $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$, $\tan \alpha = \frac{4}{3}$, 即 $\frac{2\tan \frac{\alpha}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}} =$

$\frac{4}{3}$, 整理得 $2\tan^2 \frac{\alpha}{2} + 3\tan \frac{\alpha}{2} - 2 = 0$, 即

$\left(\tan \frac{\alpha}{2} + 2\right) \left(2\tan \frac{\alpha}{2} - 1\right) = 0$, 解得

$\tan \frac{\alpha}{2} = -2$. 故选 C.

9. $-\frac{3}{4}$ 【解析】依题意, $\cos \alpha =$



$$-\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\frac{3\sqrt{10}}{10}, \text{ 所以 } \tan \alpha =$$

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{1}{3}, \text{ 所以 } \tan 2\alpha = \frac{2\tan \alpha}{1-\tan^2 \alpha} =$$

$$\frac{-\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{9}} = -\frac{3}{4}.$$

10. A 【解析】 $\because 2\cos 2\theta = 1 + \sin 2\theta$,

$$\therefore 2(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = (\cos \theta + \sin \theta)^2, \text{ 即}$$

$$2(\cos \theta - \sin \theta) \cdot (\cos \theta + \sin \theta) =$$

$$(\cos \theta + \sin \theta)^2, \text{ 又 } \because \theta \text{ 为锐角}, \therefore \cos \theta +$$

$$\sin \theta > 0, \therefore 2(\cos \theta - \sin \theta) = \cos \theta +$$

$$\sin \theta, \text{ 即 } \cos \theta = 3\sin \theta, \therefore \tan \theta = \frac{1}{3}.$$

故选 A.

11. C 【解析】由 $\cos(\alpha - \beta) = \frac{1}{3}$ 可

$$\text{得, } \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{3}, \text{ 又}$$

$$\sin \alpha \sin \beta = -\frac{1}{12}, \text{ 所以 } \cos \alpha \cos \beta = \frac{5}{12},$$

$$\text{所以 } \cos^2 \alpha - \sin^2 \beta = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} -$$

$$\frac{1 - \cos 2\beta}{2} = \frac{\cos 2\alpha + \cos 2\beta}{2} = \frac{1}{2} \{ \cos [(\alpha +$$

$$\beta) + (\alpha - \beta)] + \cos [(\alpha + \beta) - (\alpha -$$

$$\beta)] \} = \cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) =$$

$$(\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) \cos(\alpha - \beta) =$$

$$\left(\frac{5}{12} + \frac{1}{12} \right) \times \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}. \text{ 故选 C.}$$

12. $\frac{1}{3}$ 【解析】由 $\frac{1 + \tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)}{1 + \tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)} = 3$,

$$\text{得 } \tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = 2 + 3\tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right),$$

$$\text{即 } \frac{1 + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha} = 2 + 3 \cdot \frac{1 - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha},$$

$$\text{解得 } \tan \alpha = \frac{1}{2}.$$

$$\frac{\cos 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha} = \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{(\cos \alpha + \sin \alpha)^2} =$$



$$\frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha} = \frac{1 - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha} = \frac{1}{3}.$$

一题多解

$$\text{由 } \frac{1 + \tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)}{1 + \tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)} = 3, \text{ 得}$$

$$\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = 2 + 3 \tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right), \text{ 即}$$

$$\frac{1 + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha} = 2 + 3 \cdot \frac{1 - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha}.$$

$$\text{令 } \frac{1 + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha} = t, \text{ 则 } t = 2 + \frac{3}{t}, \text{ 解得 } t = 3$$

或 $t = -1$.

$$\text{当 } \frac{1 + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha} = 3 \text{ 时, } \tan \alpha = \frac{1}{2}, \text{ 此时}$$

$$\frac{\cos 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha} = \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{(\cos \alpha + \sin \alpha)^2} =$$

$$\frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha} = \frac{1 - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha} = \frac{1}{3}.$$

$$\text{当 } \frac{1 + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha} = -1 \text{ 时, 无解.}$$

$$\text{综上, } \frac{\cos 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha} = \frac{1}{3}.$$

**能力上分**

1. D 【解析】因为 $\cos \alpha + \sqrt{3} \sin \alpha = \frac{3}{5}$, 所以

$$2 \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{5}, \text{ 即 } \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{10},$$

$$\text{则 } \cos\left(2\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = 1 - 2 \sin^2\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = 1 -$$

$$2 \times \frac{9}{100} = \frac{41}{50}. \text{ 故选 D.}$$

2. A 【解析】因为 $\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} = \frac{4}{3}$, 所

$$\text{以 } 2 \tan^2 \theta + 3 \tan \theta - 2 = 0, \text{ 解得 } \tan \theta = \frac{1}{2} \text{ 或}$$

$$\tan \theta = -2.$$

$$\text{因为 } -\frac{\pi}{2} < \theta < 0, \text{ 所以 } \tan \theta = -2, \text{ 所以}$$

$$\sin \theta \cos \theta = \frac{\sin \theta \cos \theta}{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta} = \frac{\tan \theta}{1 + \tan^2 \theta} = \frac{-2}{1 + 4} =$$

$$-\frac{2}{5}.$$

3. C 【解析】 $y = 2 \sin x \cos x + 2a \cos^2 x =$

$$\sin 2x + a(1 + \cos 2x) = \sin 2x + a \cos 2x + a =$$

$$\sqrt{1+a^2} \sin(2x + \varphi) + a (\tan \varphi = a), \text{ 又函数}$$

$$y = 2 \sin x \cos x + 2a \cos^2 x \text{ 的图象关于直线 } x =$$

$$\frac{\pi}{12} \text{ 对称, 所以 } \sin\left(2 \times \frac{\pi}{12}\right) + a \cos\left(2 \times \frac{\pi}{12}\right) +$$



$$a = \pm \sqrt{1+a^2} + a, \text{ 解得 } a = \sqrt{3}.$$

4. C 【解析】 $\cos^2 \alpha (\tan^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = \sin^2 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha (1 - \cos^2 \alpha) = 1 - \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha = 1 - \frac{1}{4} \sin^2 2\alpha = 1 - \frac{1 - \cos 4\alpha}{8} = \frac{4}{5},$

即 $\frac{1 - \cos 4\alpha}{8} = \frac{1}{5},$ 解得 $\cos 4\alpha = -\frac{3}{5}.$

一题多解

因为 $\cos^2 \alpha (\tan^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = \sin^2 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha = \frac{4}{5},$ 所以 $\cos^4 \alpha - \cos^2 \alpha = -\frac{1}{5}.$

$\cos 4\alpha = 2 \cos^2 2\alpha - 1 = 2(2 \cos^2 \alpha - 1)^2 - 1 = 8(\cos^4 \alpha - \cos^2 \alpha) + 1 = -\frac{8}{5} + 1 = -\frac{3}{5}.$

5. C 【解析】由题知, $\cos \frac{\pi}{4} \cos \theta + \sin \frac{\pi}{4} \sin \theta = m \left(\cos \frac{\pi}{4} \cos \theta - \sin \frac{\pi}{4} \sin \theta \right),$

即 $\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \theta + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \theta = m \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \theta - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \theta \right),$ 即 $\cos \theta + \sin \theta = m(\cos \theta - \sin \theta),$ 所以 $(1+m) \sin \theta = (m-1) \cos \theta,$

则 $\tan \theta = \frac{m-1}{m+1}.$

$\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} = \frac{4}{3},$ 故 $2 \tan^2 \theta + 3 \tan \theta - 2 = 0,$ 解得 $\tan \theta = -2$ 或 $\tan \theta = \frac{1}{2},$ 因为

$\theta \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right),$ 所以 $\tan \theta > 0,$ 故 $\tan \theta = \frac{1}{2},$

即 $\frac{m-1}{m+1} = \frac{1}{2},$ 解得 $m = 3.$ 故选 C.

6. $\frac{7}{8}$ 【解析】 $\sin \alpha = \frac{\sin 20^\circ}{\tan 20^\circ - \sqrt{3}}$

$$= \frac{\sin 20^\circ \cos 20^\circ}{\sin 20^\circ - \sqrt{3} \cos 20^\circ}$$

$$= \frac{\sin 20^\circ \cos 20^\circ}{2 \left(\frac{1}{2} \sin 20^\circ - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 20^\circ \right)}$$

$$= \frac{\sin 20^\circ \cos 20^\circ}{2 \sin(-40^\circ)}$$

$$= \frac{\sin 20^\circ \cos 20^\circ}{-2 \sin 40^\circ}$$



$$\frac{1}{2} \sin 40^\circ \\ = \frac{1}{-2 \sin 40^\circ} = -\frac{1}{4},$$

$$\text{则 } \sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 1 - 2 \times \left(-\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{7}{8}.$$

7.2 【解析】依题意 $m = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 2 \sin 18^\circ$,

$$\begin{aligned} \text{则 } & \frac{m \sqrt{4-m^2}}{2 \cos^2 27^\circ - 1} \\ &= \frac{2 \sin 18^\circ \sqrt{4-(2 \sin 18^\circ)^2}}{2 \cos^2 27^\circ - 1} \\ &= \frac{2 \sin 18^\circ \sqrt{4 \cos^2 18^\circ}}{2 \cos^2 27^\circ - 1} \\ &= \frac{4 \sin 18^\circ \cos 18^\circ}{\cos(2 \times 27^\circ)} = \frac{2 \sin 36^\circ}{\cos 54^\circ} \\ &= \frac{2 \sin 36^\circ}{\cos(90^\circ - 36^\circ)} \\ &= \frac{2 \sin 36^\circ}{\sin 36^\circ} = 2. \end{aligned}$$

8. -2 (答案不唯一) 【解析】由题知

$$\begin{aligned} f(0) &= b - c = c, f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{a}{2} + \frac{b}{2} - c = -c, \text{解} \\ \text{得 } & b = 2c, a = -2c, \text{所以 } f(x) = \\ & -2c \sin x \cos x + 2c \cos^2 x - c = -c \sin 2x + \\ & c \cos 2x = -\sqrt{2} c \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

$$\text{因为当 } x \in \left[\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{2}\right] \text{ 时, } 2x - \frac{\pi}{4} \in \left[0, \frac{3\pi}{4}\right], \text{ 则 } \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \in [0, 1],$$

$$\text{所以当 } c > 0 \text{ 时, } -\sqrt{2}c \leq f(x) \leq 0, \text{ 则 } f(x) \leq 4, \text{ 符合题意;}$$

$$\text{当 } c < 0 \text{ 时, } 0 \leq f(x) \leq -\sqrt{2}c, \text{ 则 } -\sqrt{2}c \leq 4, \text{ 则 } -2\sqrt{2} \leq c < 0.$$

$$\text{综上, } c \geq -2\sqrt{2} \text{ 且 } c \neq 0, \text{ 所以 } c \text{ 的一个值可取 } -2, \text{ 答案不唯一, 满足 } c \geq -2\sqrt{2} \text{ 且 } c \neq 0 \text{ 即可.}$$

9. $\frac{2\sqrt{34}}{17}$ 【解析】由 $\sin(2\alpha + \beta) +$

$$2 \sin 2\alpha \cos \beta = 3 \sin \beta,$$

$$\text{得 } 3 \sin 2\alpha \cos \beta + \cos 2\alpha \sin \beta = 3 \sin \beta, \text{ 因}$$

$$\text{为 } \alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right),$$

$$\text{所以 } 3 \sin 2\alpha + \cos 2\alpha \tan \beta = 3 \tan \beta, \text{ 所以}$$

$$\tan \beta = \frac{3 \sin 2\alpha}{3 - \cos 2\alpha} = \frac{6 \sin \alpha \cos \alpha}{4 \sin^2 \alpha + 2 \cos^2 \alpha} =$$



$$\frac{3 \tan \alpha}{2 \tan^2 \alpha + 1} = \frac{3}{2 \tan \alpha + \frac{1}{\tan \alpha}}.$$

因为 $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$, 所以 $\tan \alpha \in (0, \sqrt{3})$,

则 $2 \tan \alpha + \frac{1}{\tan \alpha} \geq 2\sqrt{2}$, 当且仅当 $\tan \alpha =$

$\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, 等号成立, 所以 $\tan \beta \leq$

$$\frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

又 $\beta \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$, $\cos \beta = \sqrt{\frac{1}{\tan^2 \beta + 1}}$, 所以

当 $\tan \beta = \frac{3\sqrt{2}}{4}$ 时, $\cos \beta$ 取得最小值, 且

最小值为 $\frac{2\sqrt{34}}{17}$.

10. 【解】 (1) 由 α 为锐角, $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, 可

$$\text{得 } \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} =$$

$$\sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}.$$

由 α, β 为锐角, 得 $0 < \alpha + \beta < \pi$,

由 $\cos(\alpha + \beta) = -\frac{\sqrt{5}}{5}$, 得 $\sin(\alpha + \beta) =$

$$\sqrt{1 - \cos^2(\alpha + \beta)} = \sqrt{1 - \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2}$$

$$= \frac{2\sqrt{5}}{5},$$

则 $\cos \beta = \cos[(\alpha + \beta) - \alpha] = \cos(\alpha +$

$\beta) \cos \alpha + \sin(\alpha + \beta) \sin \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5} \times \frac{3}{5} +$

$$\frac{2\sqrt{5}}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

(2) 因为 $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \times \frac{4}{5} \times$

$$\frac{3}{5} = \frac{24}{25}, \cos 2\beta = 2 \cos^2 \beta - 1 = 2 \times \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 -$$

$$1 = -\frac{3}{5},$$

$$\text{所以 } \sin 2\alpha + \cos 2\beta = \frac{24}{25} - \frac{3}{5} = \frac{9}{25}.$$

5.5.2 简单的三角恒等变换



对点上分

1. C 【解析】 因为 α 为第一象限角, 所以

$$2k\pi < \alpha < 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}, \text{ 所以 } k\pi <$$



$\frac{\alpha}{2} < k\pi + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}$, 故 $\frac{\alpha}{2}$ 为第一或第三象限角.

由 $\tan \alpha = \frac{4}{3}, \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, 及 $\cos \alpha > 0$, 可解得 $\cos \alpha = \frac{3}{5}$.

当 $\frac{\alpha}{2}$ 为第一象限角时, $\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$;

当 $\frac{\alpha}{2}$ 为第三象限角时, $\sin \frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$. 故选 C.

2. D 【解析】由 $\cos(\pi + \theta) = -\frac{1}{3}$, 可得 $-\cos \theta = -\frac{1}{3}$, 故 $\cos \theta = \frac{1}{3}$.

$\tan \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$, 因为 θ 是第四象限角, 所以 $\tan \frac{\theta}{2} < 0$, 所以 $\tan \frac{\theta}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

3. A 【解析】因为 $\cos 2\theta = \frac{1 - \tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta} = \frac{\sqrt{5}}{3}$, 所以 $3 - 3 \tan^2 \theta = \sqrt{5} + \sqrt{5} \tan^2 \theta$, 则 $\tan^2 \theta = \frac{3 - \sqrt{5}}{3 + \sqrt{5}} = \frac{(3 - \sqrt{5})^2}{4}$, 又 $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$, 所以 $\tan \theta = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$.

一题多解

因为 $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$, 所以

$$\sin \theta > 0, \cos \theta > 0, \tan \theta > 0,$$

$$\text{所以} \begin{cases} 2\cos^2 \theta - 1 = \frac{\sqrt{5}}{3}, \\ \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1, \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} \sin \theta = \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{6}}, \\ \cos \theta = \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{6}}, \end{cases}$$

$$\text{所以} \tan \theta = \frac{\sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{6}}}{\sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{6}}} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}.$$

4. B 【解析】因为 $\sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{3}{5}$, 所



$$\text{以 } \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\frac{\sin 2\alpha}{2} = -\frac{3}{10}.$$

5. A 【解析】 $\frac{1+\sin\theta+\cos\theta}{\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}}$

$$\begin{aligned} &= \frac{2\cos^2\frac{\theta}{2}+\sin\theta}{\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}} \\ &= \frac{2\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}} \\ &= 2\cos\frac{\theta}{2}. \end{aligned}$$

因为 $\tan\theta = \frac{8}{15}, \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$,

所以 $\begin{cases} \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1, \\ \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{8}{15}, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} \sin\theta = \frac{8}{17}, \\ \cos\theta = \frac{15}{17}, \end{cases}$

又 $\frac{\theta}{2} \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$, 所以 $\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} = \frac{4\sqrt{17}}{17}$, 所以 $2\cos\frac{\theta}{2} = \frac{8\sqrt{17}}{17}$. 故选 A.

6. D 【解析】由万能公式得 $\sin x =$

$$\frac{2\tan\frac{x}{2}}{\tan^2\frac{x}{2}+1}, \cos x = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{\tan^2\frac{x}{2}+1}, \text{代入原式}$$

并化简得 $f(x) = \sqrt{3} \cdot \frac{2\tan\frac{x}{2}}{\tan^2\frac{x}{2}+1}.$

$$\left(1 + \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{\tan^2\frac{x}{2}+1}\right) = \frac{4\sqrt{3}\tan\frac{x}{2}}{\left(\tan^2\frac{x}{2}+1\right)^2}.$$

令 $\tan\frac{x}{2} = t$, 因为题中欲求最大值, 故可设 $t > 0$,

$$\begin{aligned} \text{则 } \frac{4\sqrt{3}t}{(t^2+1)^2} &= 4\sqrt{3} \cdot \frac{1}{\left(t^{\frac{3}{2}}+t^{-\frac{1}{2}}\right)^2} \\ &= \frac{4\sqrt{3}}{\left[(\sqrt{t})^3 + \frac{1}{3\sqrt{t}} + \frac{1}{3\sqrt{t}} + \frac{1}{3\sqrt{t}}\right]^2} \\ &\leq \frac{4\sqrt{3}}{\left[4\sqrt{(\sqrt{t})^3 \cdot \left(\frac{1}{3\sqrt{t}}\right)^3}\right]^2} = \frac{9}{4}, \end{aligned}$$



当且仅当 $t = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 时取等号, 故所求最大值为 $\frac{9}{4}$. 故选 D.

7. B 【解析】原式 $= \frac{1}{2} \left[\sin \left(\frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{12} \right) + \sin \left(\frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{12} \right) \right] = \frac{1}{2} \left(\sin \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}$.

8. A 【解析】 $\frac{\sin 40^\circ - \sin 20^\circ}{\cos 40^\circ - \cos 20^\circ}$

$$= \frac{2\cos\left(\frac{40^\circ+20^\circ}{2}\right)\sin\left(\frac{40^\circ-20^\circ}{2}\right)}{-2\sin\left(\frac{40^\circ+20^\circ}{2}\right)\sin\left(\frac{40^\circ-20^\circ}{2}\right)}$$

$$= -\frac{\cos 30^\circ}{\sin 30^\circ} = -\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}.$$

9. A 【解析】由 $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta) = \frac{1}{3}$, 可得 $-\frac{1}{2}(\cos 2\alpha - \cos 2\beta) = \frac{1}{3}$, 即 $\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta = \frac{1}{3}$, 又 $\sin \alpha + \sin \beta = m$, 所以结合平方差公式可得 $\sin \alpha - \sin \beta = \frac{1}{3m}$.

10. $-\frac{120}{119}$ 【解析】由和差化积公式

$$\text{得 } \cos \alpha + \cos \beta = 2\cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{12}{13},$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2\cos \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \frac{\alpha-\beta}{2} = -\frac{5}{13},$$

$$\text{则 } \tan \frac{\alpha-\beta}{2} = -\frac{5}{12}.$$

$$\text{所以 } \tan(\alpha - \beta) = \tan\left(2 \cdot \frac{\alpha-\beta}{2}\right) =$$

$$\frac{2\tan \frac{\alpha-\beta}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\alpha-\beta}{2}} = -\frac{120}{119}.$$

11. 【解】 (1) 因为 $\sin \theta \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) =$

$$\frac{1}{2} \left\{ \cos \left[\left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) - \theta \right] - \cos \left[\left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) + \theta \right] \right\} = \frac{1}{2} \left[\cos \frac{\pi}{4} - \cos \left(2\theta + \frac{\pi}{4} \right) \right] = \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{2} \cos \left(2\theta + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{3\sqrt{2}}{5}, \text{ 所}$$

$$\text{以 } \cos \left(2\theta + \frac{\pi}{4} \right) = -\frac{7\sqrt{2}}{10}.$$



$$(2) \text{ 由 (1) 可知 } \cos\left(2\theta + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{7\sqrt{2}}{10},$$

$$\text{即 } \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos 2\theta - \sin 2\theta) = -\frac{7\sqrt{2}}{10}, \text{ 所}$$

$$\text{以 } \cos 2\theta - \sin 2\theta = -\frac{7}{5}, \text{ 即 } \cos^2 \theta - \sin^2 \theta -$$

$$2\sin \theta \cos \theta = -\frac{7}{5}, \text{ 则 可 得}$$

$$\frac{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta - 2\sin \theta \cos \theta}{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = -\frac{7}{5}, \text{ 即}$$

$$\frac{1 - \tan^2 \theta - 2\tan \theta}{1 + \tan^2 \theta} = -\frac{7}{5}, \text{ 整 理 得 } \tan^2 \theta -$$

$$5\tan \theta + 6 = 0, \text{ 解得 } \tan \theta = 2 \text{ 或 } \tan \theta = 3.$$

专题上分 6 三角恒等变换

1. C 【解析】因为 $\cos \beta = \cos [(\alpha + \beta) - \alpha] = \cos \alpha \cos (\alpha + \beta) + \sin \alpha \sin (\alpha + \beta) =$
 $\frac{1}{4} + \sin \alpha \sin (\alpha + \beta) = \frac{1}{3},$

$$\text{所以 } \sin \alpha \sin (\alpha + \beta) = \frac{1}{12},$$

$$\text{所以 } \cos (2\alpha + \beta) = \cos [(\alpha + \beta) + \alpha] =$$

$$\cos \alpha \cos (\alpha + \beta) - \sin \alpha \sin (\alpha + \beta) = \frac{1}{4} -$$

$$\frac{1}{12} = \frac{1}{6}.$$

2. B 【解析】由题知 $\tan 2\alpha = \tan [(\alpha + \beta) + (\alpha - \beta)] = \frac{\tan (\alpha + \beta) + \tan (\alpha - \beta)}{1 - \tan (\alpha + \beta) \tan (\alpha - \beta)} =$
 $\frac{2+4}{1-2 \times 4} = -\frac{6}{7},$

$$\tan 2\beta = \tan [(\alpha + \beta) - (\alpha - \beta)] =$$

$$\frac{\tan (\alpha + \beta) - \tan (\alpha - \beta)}{1 + \tan (\alpha + \beta) \tan (\alpha - \beta)} = \frac{2-4}{1+2 \times 4} = -\frac{2}{9}.$$

$$\text{故 } \tan 2\alpha \cdot \tan 2\beta = \left(-\frac{6}{7}\right) \times \left(-\frac{2}{9}\right) =$$

$$\frac{4}{21}. \text{ 故选 B.}$$

3. $\frac{\pi}{4}$ 【解析】 $\because 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, \therefore \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{6} + \alpha <$
 $\frac{2\pi}{3},$ 故由 $\cos\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) = -\frac{\sqrt{10}}{10},$

$$\text{得 } \sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) = \frac{3\sqrt{10}}{10}.$$

$$\because -\frac{\pi}{2} < -\beta < 0, \therefore -\frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{3} - \beta < \frac{\pi}{3},$$

$$\text{又 } \because \sin\left(\frac{\pi}{3} - \beta\right) = \frac{\sqrt{5}}{5}, \therefore \cos\left(\frac{\pi}{3} - \beta\right) =$$

$$\frac{2\sqrt{5}}{5}.$$



$$\begin{aligned}
 \sin(\alpha - \beta) &= -\cos\left[\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) + \left(\frac{\pi}{3} - \beta\right)\right] \\
 &= -\cos\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{3} - \beta\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{3} - \beta\right) \\
 &= \frac{\sqrt{10}}{10} \times \frac{2\sqrt{5}}{5} + \frac{3\sqrt{10}}{10} \times \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{5\sqrt{50}}{50} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \\
 \text{又 } -\frac{\pi}{2} < \alpha - \beta < \frac{\pi}{2}, \text{ 所以 } \alpha - \beta &= \frac{\pi}{4}.
 \end{aligned}$$

4. ABC 【解析】A: $\frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{2\cos\beta} =$

$$\frac{2\sin\alpha\cos\beta}{2\cos\beta} = \sin\alpha, \text{ 故 A 正确;}$$

B: $4\sin\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{2} = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = \sin\alpha$, 故 B 正确;

C:
$$\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}}{1+\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}} =$$

$$\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2}} = \sin\alpha, \text{ 故 C 正确;}$$

D: $\frac{1 - \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{1 - (1 - 2\sin^2\alpha)}{2\sin\alpha\cos\alpha} =$

$$\frac{2\sin^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha} = \tan\alpha \neq \sin\alpha, \text{ 故 D 错误. 故}$$

选 ABC.

5. C 【解析】由题可得 $\sin\alpha = 2\sin\beta \cdot$

$$\cos(\alpha + \beta) = 2\sin\beta\cos\beta\cos\alpha - 2\sin\alpha\sin^2\beta,$$

两边同时除以 $\cos\alpha$, 得

$$\tan\alpha = 2\sin\beta\cos\beta - 2\tan\alpha\sin^2\beta, \text{ 所以}$$

$$\tan\alpha = \frac{2\sin\beta\cos\beta}{1+2\sin^2\beta} = \frac{2\sin\beta\cos\beta}{\cos^2\beta+3\sin^2\beta} =$$

$$\frac{2\tan\beta}{1+3\tan^2\beta} = \frac{2}{3\tan\beta + \frac{1}{\tan\beta}}.$$

因为 α, β 均为锐角, 所以 $\tan\alpha > 0, \tan\beta >$

$$0, \text{ 所以 } \tan\alpha = \frac{2}{3\tan\beta + \frac{1}{\tan\beta}} \leq$$

$$\frac{2}{2\sqrt{3\tan\beta \cdot \frac{1}{\tan\beta}}} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ 当且仅当}$$

$$3\tan\beta = \frac{1}{\tan\beta}, \text{ 即 } \tan\beta = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ 时等号成立,}$$



故选 C.

方法总结

本题考查三角恒等变换及最值问题,关键点如下:

(1) 根据两角和的余弦公式展开关系式;

(2) 同角三角函数之间的关系看似简单,但用的时候容易想不到,尤其是将“1”转化为同一个角的正弦值与余弦值的平方和的形式;

(3) 运用基本不等式时,一定要注意“一正、二定、三相等”.

6. B 【解析】由 $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) - \sin \alpha = \frac{2}{3}$, 可

$$\text{得 } \frac{1}{2}\sin \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos \alpha - \sin \alpha = \frac{2}{3},$$

$$\text{即 } \frac{\sqrt{3}}{2}\cos \alpha - \frac{1}{2}\sin \alpha = \frac{2}{3}, \text{ 所以 } \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{2}{3}, \text{ 所以 } \cos\left(2\alpha + \frac{\pi}{3}\right) =$$

$$2\cos^2\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) - 1 = 2 \times \frac{4}{9} - 1 = -\frac{1}{9}.$$

7. 1 【解析】 $f(x) = \sin 2x + 2\sqrt{3}\sin^2 x + n =$

$$\sin 2x + \sqrt{3}(1 - \cos 2x) + n = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{3} + n,$$

$$\text{当 } x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right] \text{ 时, } 2x - \frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right],$$

$$\text{所以 } \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right], \text{ 所以}$$

$$f(x) \text{ 在 } \left[0, \frac{\pi}{3}\right] \text{ 上的最大值为 } 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} +$$

$$\sqrt{3} + n = 1 + 2\sqrt{3}, \text{ 所以 } n = 1.$$

8. ABD 【解析】对于 A, 若 $\alpha = \frac{\pi}{4}$, 则

$$\tan \alpha = 1, \tan \beta = \frac{1}{3} \tan \alpha = \frac{1}{3}, \therefore \tan(\alpha +$$

$$\beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{1 + \frac{1}{3}}{1 - 1 \times \frac{1}{3}} = 2, \text{ 故 A}$$

正确;

对于 B, 若 $\alpha = 2\beta$, 则 $\tan \alpha = \tan 2\beta =$

$$\frac{2\tan \beta}{1 - \tan^2 \beta} = 3\tan \beta, \text{ 由 } \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \text{ 可知}$$

$$\tan \beta > 0, \text{ 故 } \frac{2}{1 - \tan^2 \beta} = 3, \text{ 解得 } \tan \beta = \frac{\sqrt{3}}{3},$$



$\therefore \beta = \frac{\pi}{6}, \alpha = \frac{\pi}{3}$, 故 $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$, 故 B 正确;

对于 C, $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} =$

$$\frac{2 \tan \beta}{1 + 3 \tan^2 \beta} = \frac{2}{\frac{1}{\tan \beta} + 3 \tan \beta} \leq \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ 当且}$$

仅当 $\tan \beta = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 时等号成立, 故 C 错误;

对于 D, 由 $\tan \alpha = 3 \tan \beta$ 得 $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{3 \sin \beta}{\cos \beta}$,

即 $\sin \alpha \cos \beta = 3 \sin \beta \cos \alpha$,

$$\therefore \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta}{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta} =$$

$$\frac{2 \cos \alpha \sin \beta}{4 \cos \alpha \sin \beta} = \frac{1}{2}, \text{ 故 D 正确. 故选 ABD.}$$

9. $\frac{1}{4}$ 【解析】原式 $= \sin^2 20^\circ + \cos^2 80^\circ +$

$$\sqrt{3} \sin 20^\circ \left(\frac{1}{2} \cos 20^\circ - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 20^\circ \right)$$

$$= \sin^2 20^\circ + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 160^\circ + \frac{\sqrt{3}}{4} \sin 40^\circ -$$

$$\frac{3}{2} \sin^2 20^\circ$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 20^\circ + \frac{\sqrt{3}}{4} \sin 40^\circ - \frac{1}{4} (1 - \cos 40^\circ)$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cos 20^\circ + \frac{\sqrt{3}}{4} \sin 40^\circ + \frac{1}{4} \cos 40^\circ$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cos 20^\circ + \frac{1}{2} \sin(40^\circ + 30^\circ)$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cos 20^\circ + \frac{1}{2} \sin 70^\circ$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cos 20^\circ + \frac{1}{2} \cos 20^\circ = \frac{1}{4}.$$

10. 【解】(1) $\cos^2 15^\circ + \cos^2 15^\circ -$

$$\sqrt{3} \sin 15^\circ \sin 15^\circ$$

$$= 2 \cos^2 15^\circ - \sqrt{3} \sin^2 15^\circ$$

$$= 1 + \cos 30^\circ - \frac{\sqrt{3}}{2} (1 - \cos 30^\circ)$$

$$= 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{7}{4}, \text{ 故常数}$$

$$\text{为 } \frac{7}{4}.$$

(2) 推广: 当 $\alpha + \beta = 30^\circ$ 时, $\cos^2 \alpha +$

$$\cos^2 \beta - \sqrt{3} \sin \alpha \sin \beta = \frac{7}{4}.$$

证明: 若 $\alpha + \beta = 30^\circ$, 则 $\beta = 30^\circ - \alpha$,

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta - \sqrt{3} \sin \alpha \sin \beta$$



$$= \cos^2 \alpha + \cos^2 (30^\circ - \alpha) - \sqrt{3} \sin \alpha \sin (30^\circ - \alpha)$$

$$= \cos^2 \alpha + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha + \frac{1}{2} \sin \alpha \right)^2 - \sqrt{3} \cdot$$

$$\sin \alpha \left(\frac{1}{2} \cos \alpha - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha \right)$$

$$= \cos^2 \alpha + \frac{3}{4} \cos^2 \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha \sin \alpha +$$

$$\frac{1}{4} \sin^2 \alpha - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha \sin \alpha + \frac{3}{2} \sin^2 \alpha$$

$$= \frac{7}{4} \cos^2 \alpha + \frac{7}{4} \sin^2 \alpha = \frac{7}{4}.$$

5.5 节测上分

1. C 【解析】 $\cos 77^\circ \cos 32^\circ + \cos 13^\circ \sin 32^\circ$

$$= \cos 77^\circ \cos 32^\circ + \sin 77^\circ \sin 32^\circ$$

$$= \cos (77^\circ - 32^\circ) = \cos 45^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

2. D 【解析】由题意得 $\tan \alpha = -\frac{4}{3}$, 则

$$\sin 2\alpha = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} = \frac{2 \tan \alpha}{\tan^2 \alpha + 1} =$$

$$\frac{2 \times \left(-\frac{4}{3}\right)}{1 + \left(-\frac{4}{3}\right)^2} = -\frac{24}{25}.$$

3. B 【解析】 $\sin \left(2\theta + \frac{\pi}{3} \right) = \sin \left[2 \left(\theta - \frac{\pi}{12} \right) + \frac{\pi}{2} \right] = \cos \left[2 \left(\theta - \frac{\pi}{12} \right) \right] = 1 -$

$$2 \sin^2 \left(\theta - \frac{\pi}{12} \right) = 1 - 2 \times \frac{9}{16} = -\frac{1}{8}.$$

故 B 正确.

4. A 【解析】因为 $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right)$, 所以

$$\alpha + \frac{\pi}{4} \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right), \text{ 又 } \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{4}{5}, \text{ 所}$$

$$\text{以 } \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5} \right)^2} = \frac{3}{5}, \text{ 所以}$$

$$\sin \alpha = \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \right) = \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) \cos \frac{\pi}{4} - \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) \sin \frac{\pi}{4} = \frac{4}{5} \times$$

$$\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{3}{5} \times \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{10}.$$

5. A 【解析】原式 = $\frac{2 \sin 40^\circ \cos 40^\circ}{2 \cos^2 40^\circ} -$

$$4 \sin 40^\circ = \frac{\sin 40^\circ}{\cos 40^\circ} - 4 \sin 40^\circ$$



$$\begin{aligned}
 &= \frac{\sin 40^\circ - 2\sin 80^\circ}{\cos 40^\circ} \\
 &= \frac{\sin 40^\circ - 2\sin(60^\circ + 40^\circ)}{\cos 40^\circ} \\
 &= \frac{\sin 40^\circ - 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 40^\circ + \frac{1}{2}\sin 40^\circ\right)}{\cos 40^\circ} \\
 &= \frac{-\sqrt{3}\cos 40^\circ}{\cos 40^\circ} = -\sqrt{3}. \text{ 故选 A.}
 \end{aligned}$$

6. B 【解析】 $f(x) = \sin x \cos x + \sqrt{3} \cos^2 x - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2} (1 + \cos 2x) - \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right).$

因为 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, 所以 $2x + \frac{\pi}{3} \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right]$, 所以 $-\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \leq 1$, 所以函数 $f(x)$ 的值域为 $\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right]$.

7. A 【解析】 $a = \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin 14^\circ + \cos 14^\circ) = \sin 14^\circ \cos 45^\circ + \cos 14^\circ \sin 45^\circ = \sin(14^\circ + 45^\circ) = \sin 59^\circ,$

$$b = \sqrt{\frac{1 - \cos 122^\circ}{2}} = \sqrt{\sin^2 61^\circ} = \sin 61^\circ,$$

$$\begin{aligned}
 c &= \frac{\cos 20^\circ - \sin 30^\circ \cos 40^\circ}{\sin 40^\circ} \\
 &= \frac{\cos(60^\circ - 40^\circ) - \cos 60^\circ \cos 40^\circ}{\sin 40^\circ} \\
 &= \frac{\sin 60^\circ \sin 40^\circ}{\sin 40^\circ} = \sin 60^\circ,
 \end{aligned}$$

由正弦函数 $y = \sin x$ 的单调性知 $a < c < b$.

8. C 【解析】 $\cos\left(\frac{5\pi}{6} + 2\alpha\right) = \cos 2\left(\frac{5\pi}{12} + \alpha\right) = 2\cos^2\left(\frac{5\pi}{12} + \alpha\right) - 1 = 2\cos^2\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{12} - \alpha\right)\right] - 1 = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{12} - \alpha\right) - 1 = -\frac{7}{8}.$

一题多解

因为 $\cos\left(\frac{\pi}{6} - 2\alpha\right) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{12} - \alpha\right) = 1 - 2 \times \frac{1}{16} = \frac{7}{8},$

所以 $\cos\left(\frac{5\pi}{6} + 2\alpha\right) = \cos\left[\pi - \left(\frac{\pi}{6} - 2\alpha\right)\right] = -\cos\left(\frac{\pi}{6} - 2\alpha\right) = -\frac{7}{8}.$



9. C 【解析】由题意可知 $\tan \alpha = 2, \tan \beta =$

7 , 则 $\tan 2\alpha = \frac{2\tan \alpha}{1-\tan^2 \alpha} = -\frac{4}{3}$, 故 $\tan(2\alpha -$

$$\beta) = \frac{\tan 2\alpha - \tan \beta}{1 + \tan 2\alpha \tan \beta} = \frac{-\frac{4}{3} - 7}{1 - \frac{4}{3} \times 7} = 1.$$

因为 $0 \leq \alpha < \pi$, 且 $\tan \alpha > 1$, 所以 $\frac{\pi}{4} < \alpha <$

$\frac{\pi}{2}$, 所以 $\frac{\pi}{2} < 2\alpha < \pi$.

因为 $0 \leq \beta < \pi$, 且 $\tan \beta > 0$, 所以 $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$,

所以 $-\frac{\pi}{2} < -\beta < 0$, 则 $0 < 2\alpha - \beta < \pi$.

因为 $\tan(2\alpha - \beta) = 1$, 所以 $2\alpha - \beta = \frac{\pi}{4}$. 故

选 C.

10. B 【解析】由 $\alpha \in (0, \pi), 0 < \cos \alpha =$

$\frac{\sqrt{5}}{5} < \frac{\sqrt{2}}{2}$, 得 $\alpha \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$, 则 $\sin \alpha =$

$$\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{1}{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5},$$

$\cos \beta = \cos(\alpha + \beta - \alpha) = \cos(\alpha + \beta) \cos \alpha +$

$\sin(\alpha + \beta) \sin \alpha = \cos(\alpha + \beta) \times \frac{\sqrt{5}}{5} +$

$$\frac{\sqrt{2}}{10} \times \frac{2\sqrt{5}}{5},$$

由 $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}, 0 < \beta < \pi$, 得 $\frac{\pi}{4} < \alpha + \beta < \frac{3\pi}{2}$,

因为 $0 < \sin(\alpha + \beta) = \frac{\sqrt{2}}{10} < \frac{\sqrt{2}}{2}$,

所以 $\frac{3\pi}{4} < \alpha + \beta < \pi$,

所以 $\cos(\alpha + \beta) = -\frac{7\sqrt{2}}{10}$,

则 $\cos \beta = -\frac{7\sqrt{2}}{10} \times \frac{\sqrt{5}}{5} + \frac{\sqrt{2}}{10} \times \frac{2\sqrt{5}}{5} =$

$$-\frac{\sqrt{10}}{10}.$$

11. D 【解析】因为 $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}$,

$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{4}$,

所以 $\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{4}$,

所以 $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin$

$$\alpha \sin \beta = \frac{3}{4}.$$



$$\begin{aligned}
 \sin^2 \alpha - \cos^2 \beta &= \frac{1}{2} (1 - \cos 2\alpha) - \\
 &\frac{1}{2} (1 + \cos 2\beta) \\
 &= -\frac{1}{2} (\cos 2\alpha + \cos 2\beta) \\
 &= -\frac{1}{2} \times 2 \cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) \\
 &= -\cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) \\
 &= -\frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = -\frac{3}{16}.
 \end{aligned}$$

12. BC 【解析】因为 $\tan(\alpha + \beta) + \tan \alpha +$

$$\begin{aligned}
 \tan \beta &= \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} + \tan \alpha + \tan \beta = \\
 (\tan \alpha + \tan \beta) \cdot \frac{2 - \tan \alpha \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} &= 0,
 \end{aligned}$$

且 $\alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 所以 $\tan \alpha \tan \beta = 2$,

$$\text{即 } \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta} = 2,$$

所以 $\sin \alpha \sin \beta = 2 \cos \alpha \cos \beta$,

所以 $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta =$

$$3 \cos \alpha \cos \beta = \frac{2}{3},$$

$$\text{所以 } \cos \alpha \cos \beta = \frac{2}{9}, \sin \alpha \sin \beta = \frac{4}{9},$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta =$$

$$-\frac{2}{9}. \text{ 故选 BC.}$$

13. A 【解析】由 $\tan \alpha + \tan \beta = \frac{1}{\cos \beta}$,

$$\text{得 } \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{1}{\cos \beta},$$

$$\text{故 } \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \cos \alpha,$$

$$\text{即 } \sin(\alpha + \beta) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right).$$

由 $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 得 $0 < \alpha +$

$$\beta < \pi,$$

$$0 < \frac{\pi}{2} - \alpha < \frac{\pi}{2}, \text{ 则 } \alpha + \beta = \frac{\pi}{2} - \alpha \text{ 或 } \alpha + \beta +$$

$$\frac{\pi}{2} - \alpha = \pi,$$

$$\text{即 } 2\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \text{ 或 } \beta + \frac{\pi}{2} = \pi,$$

$$\text{故 } 2\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \text{ 或 } \beta = \frac{\pi}{2} \text{ (舍).}$$

故 A 正确.



14. AC



思路分析

由题知 $\frac{\alpha}{2} + \beta = \frac{\pi}{3}$,

通过已知条件与两角和的正切公式

得 $\tan \frac{\alpha}{2} + \tan \beta$ 的值, 将 $\tan \frac{\alpha}{2}, \tan \beta$

看作方程 $x^2 - (3 - \sqrt{3})x + 2 - \sqrt{3} = 0$ 的

两根, 解方程得到 $\tan \frac{\alpha}{2}, \tan \beta$ 的值,

可得 β 的值, 再由二倍角公式求得

$\tan \alpha$ 的值, 从而得到 α 的值.

【解析】由题知 $\frac{\alpha}{2} + \beta = \frac{\pi}{3}$, 所以 $\tan \left(\frac{\alpha}{2} + \right.$

$$\left. \beta \right) = \frac{\tan \frac{\alpha}{2} + \tan \beta}{1 - \tan \frac{\alpha}{2} \tan \beta} = \sqrt{3}, \text{ 则 } \tan \frac{\alpha}{2} +$$

$\tan \beta = 3 - \sqrt{3}$, 所以 $\tan \frac{\alpha}{2}, \tan \beta$ 是方

程 $x^2 - (3 - \sqrt{3})x + 2 - \sqrt{3} = 0$ 的两根, 解

得 $x_1 = 1, x_2 = 2 - \sqrt{3}$.

当 $\tan \frac{\alpha}{2} = 1$ 时, 因为 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, 所以 $0 <$

$\frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{4}$, 此时 α 不存在, 故 $\tan \frac{\alpha}{2} = 2 -$

$\sqrt{3}, \tan \beta = 1, \beta = \frac{\pi}{4}$, 则 $\tan \alpha =$

$$\frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{-6 + 4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ 因为 } \alpha \text{ 为锐}$$

角, 所以 $\alpha = \frac{\pi}{6}$. 故选 AC.

15. BC 【解析】由 $\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in$

\mathbf{Z} , 得 $x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 故函数 $f(x)$ 的

定义域为 $\left\{ x \mid x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z} \right\}$, 定

义域不关于原点对称, 所以函数 $f(x)$ 不

是偶函数, $f(x)$ 的图象不关于坐标原点

中心对称, 故 A, D 错误;

因为 $(1 - \sin x) \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) =$

$$\left(\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} \right)^2 \frac{\tan \frac{x}{2} + 1}{1 - \tan \frac{x}{2}} = \left(\cos \frac{x}{2} -$$



$$\sin \frac{x}{2} \Big)^2 \frac{\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}} = \cos^2 \frac{x}{2} -$$

$$\sin^2 \frac{x}{2} = \cos x \left(x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z} \right), \text{ 所}$$

$$\text{以 } f(x) = \cos x (1 - \sin x) \cdot \tan \left(\frac{x}{2} + \right.$$

$$\left. \frac{\pi}{4} \right) = \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \left(x \neq \frac{\pi}{2} + \right.$$

$$\left. 2k\pi, k \in \mathbf{Z} \right), \text{ 当 } x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi \right) \text{ 时,}$$

$$2x \in (\pi, 2\pi), y = \cos x \text{ 在 } (\pi, 2\pi) \text{ 上单}$$

$$\text{调递增, 则 } f(x) \text{ 在 } \left(\frac{\pi}{2}, \pi \right) \text{ 上单调递}$$

增, 故 B 正确;

$$y = \cos 2x \text{ 的最小正周期为 } \frac{2\pi}{2} = \pi, \text{ 但函}$$

$$\text{数 } f(x) \text{ 的定义域是 } \left\{ x \mid x \neq \frac{\pi}{2} + \right.$$

$$\left. 2k\pi, k \in \mathbf{Z} \right\}, \text{ 所以函数 } f(x) \text{ 的最小正}$$

周期为 2π , 故 C 正确.

故选 BC.

16. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 【解析】因为 $\cos \left(\frac{\pi}{3} + \theta \right) \cdot$

$$\cos \left(\frac{\pi}{6} - \theta \right) = \cos \left(\frac{\pi}{3} + \theta \right) \sin \left(\frac{\pi}{3} + \theta \right) =$$

$$\frac{1}{2} \sin \left(\frac{2\pi}{3} + 2\theta \right) = \frac{1}{4},$$

$$\text{所以 } \sin \left(\frac{2\pi}{3} + 2\theta \right) = \frac{1}{2}, \text{ 由 } 0 < \theta < \frac{\pi}{6} \text{ 得}$$

$$\frac{2\pi}{3} < \frac{2\pi}{3} + 2\theta < \pi, \text{ 则 } \cos \left(\frac{2\pi}{3} + 2\theta \right) = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{又 } \sin^4 \theta - \cos^4 \theta = (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) = -\cos 2\theta,$$

$$\text{且 } \cos 2\theta = \cos \left[\left(\frac{2\pi}{3} + 2\theta \right) - \frac{2\pi}{3} \right] =$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} \times \left(-\frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 所以}$$

$$\sin^4 \theta - \cos^4 \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

17. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 【解析】 $\frac{1 - 2\sin^2 5^\circ}{2\sin 10^\circ} - 2\cos 10^\circ$

$$= \frac{\cos 10^\circ}{2\sin 10^\circ} - 2\cos 10^\circ$$

$$= \frac{\cos 10^\circ - 4\sin 10^\circ \cos 10^\circ}{2\sin 10^\circ}$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{\cos 10^\circ - 2\sin 20^\circ}{2\sin 10^\circ} \\
&= \frac{\cos(30^\circ - 20^\circ) - 2\sin 20^\circ}{2\sin 10^\circ} \\
&= \frac{\cos 30^\circ \cos 20^\circ + \sin 30^\circ \sin 20^\circ - 2\sin 20^\circ}{2\sin 10^\circ} \\
&= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \cos 20^\circ - \frac{3}{2} \sin 20^\circ}{2\sin 10^\circ} \\
&= \frac{\sqrt{3} \left(\frac{1}{2} \cos 20^\circ - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 20^\circ \right)}{2\sin 10^\circ} \\
&= \frac{\sqrt{3} \sin(30^\circ - 20^\circ)}{2\sin 10^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2}.
\end{aligned}$$

18. $-\frac{1}{2}$ 【解析】由 $4\sin \alpha \cos \alpha (1 -$

$2\sin^2 \alpha)(1 + \sin \beta) + (1 - \cos 4\alpha) \cos \beta = 0$, 得 $2\sin 2\alpha \cos 2\alpha (1 + \sin \beta) + 2\sin^2 2\alpha \cos \beta = 0$,

又 $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{4}$, 所以 $\pi < 2\alpha < \frac{3\pi}{2}$, 所以

$\sin 2\alpha \neq 0$, 所以 $\cos 2\alpha (1 + \sin \beta) + \sin 2\alpha \cos \beta = 0$, 即 $\cos 2\alpha + \sin(2\alpha + \beta) = 0$.

因为 $2\alpha + \beta \in \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right)$, $\frac{7\pi}{2} - 2\alpha \in$

$\left(2\pi, \frac{5\pi}{2}\right) \subseteq \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right)$, 所以 $\sin(2\alpha +$

$\beta) = -\cos 2\alpha = \sin\left(\frac{7\pi}{2} - 2\alpha\right)$, 所以 $2\alpha +$

$\beta = \frac{7\pi}{2} - 2\alpha$, 所以 $4\alpha + \beta = \frac{7\pi}{2}$, 则 $\frac{4\alpha}{3} +$

$\frac{\beta}{3} = \frac{7\pi}{6}$, 所以 $\sin\left(\frac{4\alpha}{3} + \frac{\beta}{3}\right) =$

$\sin \frac{7\pi}{6} = -\frac{1}{2}$.

19. 【解】(1) 由题意可得, $\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) =$

$$\frac{\tan \alpha + 1}{1 - \tan \alpha} = \frac{\frac{3\sqrt{10}}{10}}{\frac{\sqrt{10}}{10}} = 3,$$

即 $3 - 3\tan \alpha = \tan \alpha + 1$, 所以 $\tan \alpha = \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned}
(2) & \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}{\sin^2(\pi + \alpha) + 2\sin(\pi - \alpha)\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)} \\
&= \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha + 2\sin \alpha \cos \alpha}
\end{aligned}$$



$$= \frac{\tan^2 \alpha}{\tan^2 \alpha + 2 \tan \alpha}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{5}.$$

(3) 根据半角公式得 $\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}$.

由 $\tan \alpha = \frac{1}{2}$, 即 $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1}{2}$, 可得 $\sin \alpha = \frac{1}{2} \cos \alpha$,

又因为 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, 把 $\sin \alpha = \frac{1}{2} \cos \alpha$ 代入可得 $\left(\frac{1}{2} \cos \alpha\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1$,

即 $\frac{1}{4} \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, 解得 $\cos \alpha = \pm \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

由 $\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = 3 > \sqrt{3}$, 且角 $\alpha + \frac{\pi}{4}$ 的终边在第一象限,

得 $\frac{\pi}{3} + 2k\pi < \alpha + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$,

则 $\frac{\pi}{12} + 2k\pi < \alpha < \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$,

所以 $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \frac{2\sqrt{5}}{5}}{2} = \frac{5 + 2\sqrt{5}}{10}$.

20.



思路分析

(1) 根据倍角公式,

两角和与差的正弦公式化简

$$f(x) = (1 - \sqrt{3}) \cos^2 x + \sin x \cos x +$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right), \text{再根据正弦}$$

函数的最小正周期公式即可求解;

$$(2) \text{ 令 } 2x - \frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} +\right.$$

$$\left. 2k\pi\right], k \in \mathbf{Z}, \text{求得 } f(x) \text{ 的单调递增区}$$

间, 结合 $x \in [0, \pi]$ 即可求解.

【解】(1) $f(x) = (1 - \sqrt{3}) \cos^2 x +$



$$\begin{aligned}
 & \sin x \cos x + \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = (1 - \\
 & \sqrt{3}) \times \frac{1 + \cos 2x}{2} + \frac{1}{2} \sin 2x + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin x + \right. \\
 & \left. \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x\right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x\right) = \\
 & \frac{1 - \sqrt{3}}{2} + \frac{1 - \sqrt{3}}{2} \cos 2x + \frac{1}{2} \sin 2x + \\
 & \frac{1}{2} \sin^2 x - \frac{1}{2} \cos^2 x = \frac{1 - \sqrt{3}}{2} + \frac{1 - \sqrt{3}}{2} \cos \\
 & 2x + \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{1}{2} \cos 2x = \frac{1 - \sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \\
 & \sin 2x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + \\
 & \frac{1 - \sqrt{3}}{2}, \text{ 所以 } f(x) \text{ 的最小正周期为 } \\
 & \frac{2\pi}{2} = \pi.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \text{ 令 } 2x - \frac{\pi}{3} & \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + \right. \\
 & \left. 2k\pi\right], k \in \mathbf{Z}, \text{ 则 } x \in \left[-\frac{\pi}{12} + k\pi, \right. \\
 & \left. \frac{5\pi}{12} + k\pi\right], k \in \mathbf{Z}, \text{ 又 } x \in [0, \pi], \\
 & \text{ 所以 } f(x) \text{ 的单调递增区间为 } \\
 & \left[0, \frac{5\pi}{12}\right], \left[\frac{11\pi}{12}, \pi\right].
 \end{aligned}$$

5.6 函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$

5.6.1 匀速圆周运动的数学模型+

5.6.2 函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 的图象



对点上分

1. B 【解析】令 $2x + \frac{\pi}{3} = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi,$

得 $x = -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{12}, \frac{5\pi}{6},$ 故选 B.

2. 【解】(1) 函数 $f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right),$ 由

$$\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z},$$

得 $\frac{\pi}{6} + k\pi \leq x \leq \frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbf{Z},$ 所以函

数 $f(x)$ 的单调递减区间是

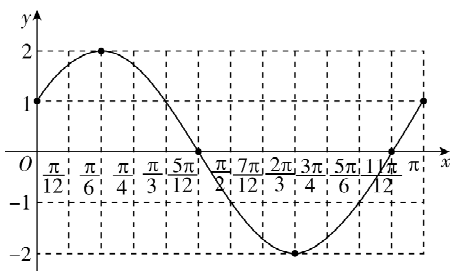
$$\left[\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{2\pi}{3} + k\pi\right] (k \in \mathbf{Z}).$$

(2) 列表:



x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{12}$	π
$2x + \frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{13\pi}{6}$
$f(x)$	1	2	0	-2	0	1

描点, 连线, 画出 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上的大致图象如图:



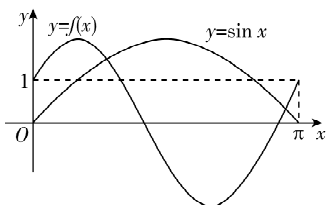
(3) 在同一平面直角坐标系内作出函数

$y = \sin x$ 与 $y = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ 在 $[0, \pi]$ 上

的图象, 如图, 观察图象可知, 当 $x \in [0,$

$\pi]$ 时, 曲线 $y = \sin x$ 与 $y = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$

的交点个数为 2.



3. C 【解析】依题意, 得 $\sin(x - \alpha) = \cos(x -$

$$\beta) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} - \beta\right),$$

所以 $x - \alpha + 2k\pi = x + \frac{\pi}{2} - \beta (k \in \mathbf{Z})$ 或 $x -$

$$\alpha + x + \frac{\pi}{2} - \beta = \pi + 2k\pi (k \in \mathbf{Z}),$$

$$\text{得 } \alpha - \beta = 2k\pi - \frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z}) \text{ 或 } 2x - (\alpha + \beta) =$$

$$\frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z}) \text{ (不恒成立, 舍去), 故}$$

选 C.

4. A 【解析】由题意可知 $f(x)$ 的最小正周

期 $T = \frac{\pi}{2} \times 2 = \pi$, 则 $\frac{2\pi}{\omega} = T = \pi$, 所以 $\omega = 2$,

$$\text{所以 } f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left[\frac{\pi}{2} -$$

$$\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)\right] = \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right), \text{ 所以可将}$$

$y = \cos x$ 的图象上所有的点先向右平移

$\frac{\pi}{6}$ 个单位长度得到 $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ 的图



象,再将所得图象上所有点的横坐标变为原来的 $\frac{1}{2}$,纵坐标不变,得到 $y = \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ 的图象,即 $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的图象,故选 A.

5. B



攻略上分

由已知图象确定函数解析式的方法具体可见大招攻略 55.

【解析】由题可得 $A = 2$, $\frac{2\pi}{\omega} = \frac{4}{3} \left(\frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{3} \right)$, 解得 $\omega = 2$.

$\therefore f(x) = 2\sin(2x + \varphi)$, 把 $\left(\frac{5\pi}{12}, 2\right)$ 代入得

$$2\sin\left(\frac{5\pi}{6} + \varphi\right) = 2, \therefore \frac{5\pi}{6} + \varphi = \frac{\pi}{2} +$$

$$2k\pi (k \in \mathbf{Z}), \therefore \varphi = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z}), \text{ 又}$$

$$|\varphi| < \frac{\pi}{2}, \therefore \varphi = -\frac{\pi}{3}. \therefore f(x) \text{ 的解析式}$$

$$\text{为 } f(x) = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right). \text{ 故 B 正确.}$$

6. B 【解析】设 $f(x)$ 的最小正周期为 T ,

$$\text{由题图知 } \frac{3}{4}T = \frac{11\pi}{12} - \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{4}, \text{ 则 } T = \pi,$$

$$\text{则 } \frac{2\pi}{\omega} = \pi, \text{ 则 } \omega = 2,$$

$$\text{由 } f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(2 \times \frac{\pi}{6} + \varphi\right) = 1, \text{ 得 } \frac{\pi}{3} + \varphi =$$

$$\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}, \text{ 可得 } \varphi = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z},$$

$$\text{又 } |\varphi| < \frac{\pi}{2}, \text{ 所以 } \varphi = \frac{\pi}{6}, \text{ 故 } f(x) =$$

$$\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right).$$

$$\text{由题意, } g(x) = f\left(x + \frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right),$$

$$\text{故 } g\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(2 \times \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right) =$$

$$\sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \text{ 故选 B.}$$

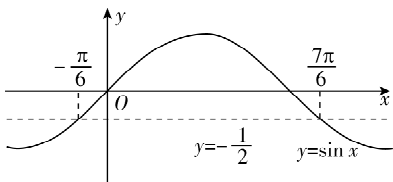
7. D 【解析】因为 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$, $\omega > 0$, 所以

$$-\frac{\pi}{6} \leq \omega x - \frac{\pi}{6} \leq \frac{\omega\pi}{6} - \frac{\pi}{6}, \text{ 因为 } f(x) \geq$$

$$-\frac{1}{2}, \text{ 所以由正弦函数图象可得 } -\frac{\pi}{6} <$$



$$\frac{\omega\pi}{6} - \frac{\pi}{6} \leq \frac{7\pi}{6}, \text{解得 } 0 < \omega \leq 8. \text{ 故选 D.}$$



8. AC 【解析】由题图得 $f(x)$ 的最小正周期

$$T = 4 \left[\frac{\pi}{6} - \left(-\frac{\pi}{12} \right) \right] = \frac{2\pi}{\omega}, \text{解得 } \omega = 2,$$

$$\text{由 } f\left(-\frac{\pi}{12}\right) = 1, \text{得 } 2 \times \left(-\frac{\pi}{12}\right) + \varphi = \frac{\pi}{2} +$$

$$2k\pi, k \in \mathbf{Z}, \text{又 } 0 < \varphi < \pi, \text{所以 } \varphi = \frac{2\pi}{3}.$$

$$\text{对于 A, } f(x) = \sin\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right), \text{A 正确;}$$

$$\text{对于 B, 当 } x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \text{ 时, } 2x + \frac{2\pi}{3} \in$$

$$\left[\frac{5\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}\right], \text{当 } 2x + \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{2}, \text{即 } x = \frac{11\pi}{12} \text{ 时,}$$

$f(x)$ 取得最大值, 因此 $f(x)$ 在区间

$$\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \text{ 上不单调, B 错误;}$$

$$\text{对于 C, } f\left(x - \frac{\pi}{12}\right) = \sin\left[2\left(x - \frac{\pi}{12}\right) + \frac{2\pi}{3}\right] = \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos 2x, \text{C 正确;}$$

$$\text{对于 D, 当 } x \in (0, \pi) \text{ 时, } 2x + \frac{2\pi}{3} \in$$

$$\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}\right), \text{由 } f(x) = 0, \text{得 } 2x + \frac{2\pi}{3} = \pi \text{ 或}$$

$$2x + \frac{2\pi}{3} = 2\pi, \text{因此方程 } f(x) = 0 \text{ 在 } (0, \pi) \text{ 上有两个根, D 错误. 故选 AC.}$$

9. 【解】(1) 设函数 $f(x)$ 的最小正周期为

$$T, \text{由题意可得, } A = 2, T = 2 \times \frac{\pi}{2} = \pi = \frac{2\pi}{\omega},$$

$$\text{故 } \omega = 2, \text{因为 } f(0) = 2\sin \varphi = 1, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2},$$

$$\text{所以 } \varphi = \frac{\pi}{6}, \text{故 } f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right),$$

$$\text{根据“五点法”可得 } 2x_0 + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}, \text{解}$$

$$\text{得 } x_0 = \frac{\pi}{6}.$$

$$(2) \text{由 } \frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in$$

$$\mathbf{Z} \text{ 得 } \frac{\pi}{6} + k\pi \leq x \leq \frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbf{Z},$$

故 $f(x)$ 的单调递减区间为



$$\left[\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{2\pi}{3} + k\pi \right], k \in \mathbf{Z}.$$

$$(3) \text{ 由题意得, } g(x) = 2\sin \left[4 \left(x + \frac{\pi}{24} \right) + \frac{\pi}{6} \right] = 2\sin \left(4x + \frac{\pi}{3} \right), \text{ 当 } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{8} \text{ 时,}$$

$$\frac{\pi}{3} \leq 4x + \frac{\pi}{3} \leq \frac{5\pi}{6},$$

所以 $\frac{1}{2} \leq \sin \left(4x + \frac{\pi}{3} \right) \leq 1$, 所以 $1 \leq g(x) \leq 2$, 故 $g(x)$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{8} \right]$ 上的值域为 $[1, 2]$.

5.6 节测上分

1. A 【解析】因为函数 $f(x) = \sin \omega x - \sqrt{3} \cos \omega x = 2\sin \left(\omega x - \frac{\pi}{3} \right)$, 函数 $f(x)$ 的最小正周期是 π 且 $\omega > 0$, 则 $\frac{2\pi}{\omega} = \pi$, 解得 $\omega = 2$, 所以 $f(x) = 2\sin \left(2x - \frac{\pi}{3} \right)$, 将 $f(x)$ 的图象向右平移 φ 个单位长度后得到函数 $g(x)$ 的图象, 则 $g(x) = f(x - \varphi) = 2\sin \left[2(x - \varphi) - \frac{\pi}{3} \right] = 2\sin \left[2x - \left(2\varphi + \frac{\pi}{3} \right) \right]$.

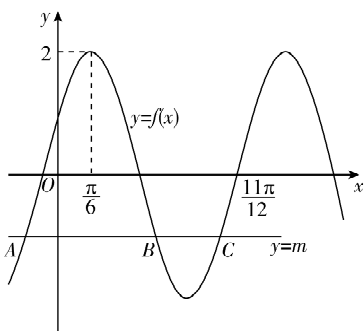
若 $g(x)$ 为偶函数, 则 $2\varphi + \frac{\pi}{3} = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$, 解得 $\varphi = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{12}, k \in \mathbf{Z}$, 可知当 $k = 0$ 时, 正实数 φ 取得最小值 $\frac{\pi}{12}$. 故选 A.

2. D 【解析】设 $f(x)$ 的最小正周期为 T , 由 $f(x)$ 的部分图象知, $\frac{3T}{4} = \frac{11\pi}{12} - \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{4}$, 解得 $T = \pi$,

$$\text{所以 } \omega = \frac{2\pi}{T} = 2, \text{ 又 } 2 \times \frac{\pi}{6} + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}, \text{ 解得 } \varphi = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z},$$

$$\text{因为 } |\varphi| < \frac{\pi}{2}, \text{ 所以 } \varphi = \frac{\pi}{6}, \text{ 所以 } f(x) = 2\sin \left(2x + \frac{\pi}{6} \right).$$

若 $m < 0$, 不妨设 A, B, C 的位置如图①所示, 则 $AC = x_C - x_A = \pi$,



图①

又 $AB = 2BC$, 所以 $AB = \frac{2}{3}AC = \frac{2}{3}\pi =$

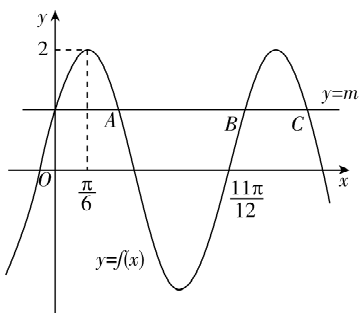
$x_B - x_A$, 又 $x_B + x_A = 2 \times \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$,

所以 $x_A = -\frac{\pi}{6}$, 则 $m = f(x_A) = f\left(-\frac{\pi}{6}\right) =$

$2\sin\left[2 \times \left(-\frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{6}\right] = -1$;

同理当 $m > 0$ 时, 如图②, $AB = \frac{2}{3}AC =$

$\frac{2}{3}\pi = x_B - x_A$,



图②

令 $f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = 0$, 解得 $x =$

$\frac{k_1\pi}{2} - \frac{\pi}{12}, k_1 \in \mathbf{Z}$, 所以点 $\left(\frac{5\pi}{12}, 0\right)$ 是 $f(x)$

图象与 x 轴的一个交点, 即 A, B 关于直

线 $x = \frac{\frac{5\pi}{12} + \frac{11\pi}{12}}{2} = \frac{2\pi}{3}$ 对称, 得 $x_B + x_A = 2 \times$

$\frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$, 又 $x_B - x_A = \frac{2}{3}\pi$, 解得 $x_A = \frac{\pi}{3}$, 所

以 $m = f(x_A) = f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\sin\left(2 \times \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) = 1$.

综上所述, $m = \pm 1$. 故选 D.

3. BCD 【解析】 $f(x) = (a \cdot \sin x +$

$\cos x) \cos x - \frac{1}{2} = a \sin x \cos x + \cos^2 x - \frac{1}{2} =$

$\frac{1}{2}(a \sin 2x + \cos 2x)$, 因为 $f(x)$ 的图象的



一条对称轴为直线 $x = \frac{\pi}{6}$, 故 $\pm \sqrt{1+a^2} =$

$\frac{\sqrt{3}}{2}a + \frac{1}{2}$, 解得 $a = \sqrt{3}$, 则 $f(x) =$

$\frac{1}{2}(\sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$,

则 $f(x)$ 的最小正周期为 π , 函数为非奇非偶函数, 故 A 错误;

令 $2x + \frac{\pi}{6} = k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 则 $x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{12}$,

当 $k = -1$ 时, $f(x)$ 图象的一个对称中心为 $\left(-\frac{7\pi}{12}, 0\right)$, 故 B 正确;

令 $\frac{\pi}{2} \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{3\pi}{2}$, 可得 $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$,

故 $f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$ 上单调递减, 故 C 正确;

将函数 $y = 2\sin 2x$ 图象上各点的纵坐标缩短为原来的 $\frac{1}{2}$, 横坐标不变, 然后把所

得函数图象再向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度,

则 $y = \frac{1}{2} \times 2\sin\left[2\left(x + \frac{\pi}{12}\right)\right] = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$, 即可得 $f(x)$ 的图象, 故 D 正确.

4. $\sqrt{3}$ 【解析】由题图可得函数 $f(x)$ 的最大值为 2, 最小值为 -2, 故 $A = 2$,

设 $f(x)$ 的最小正周期为 T , 根据题图可

知 $\frac{T}{2} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$, 所以 $T = \pi$, 所以

$\frac{2\pi}{\omega} = \pi$, 解得 $\omega = 2$,

所以 $f(x) = 2\sin(2x + \varphi)$, 又函数 $f(x)$ 的

图象过点 $\left(\frac{\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}}{2}, 2\right)$, 即点 $\left(\frac{\pi}{12}, 2\right)$,

所以 $f\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2\sin\left(2 \times \frac{\pi}{12} + \varphi\right) = 2$, 所以

$\frac{\pi}{6} + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 解得 $\varphi = \frac{\pi}{3} +$

$2k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 又 $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$, 所以 $\varphi = \frac{\pi}{3}$,

所以 $f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$, 所以 $f\left(\frac{\pi}{6}\right) =$

$2\sin\left(2 \times \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right) = 2\sin \frac{2\pi}{3} = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$.

5. $\left(0, \frac{1}{4}\right] \cup \left[1, \frac{5}{4}\right)$ 【解析】将函



数 $f(x) = \sin 2x$ 的图象先向右平移 $\frac{\pi}{8}$ 个

单位长度, 得到函数 $y = \sin \left[2 \left(x - \frac{\pi}{8} \right) \right] = \sin \left(2x - \frac{\pi}{4} \right)$ 的图象, 再把所得

函数图象上所有点的横坐标变为原来的 $\frac{2}{\omega}$ ($\omega > 0$) 倍, 纵坐标不变, 得到函数

$g(x) = \sin \left(2 \times \frac{\omega}{2} x - \frac{\pi}{4} \right) = \sin \left(\omega x - \frac{\pi}{4} \right)$ 的图象,

当 $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \pi \right)$ 时, $\omega x - \frac{\pi}{4} \in \left(\frac{\omega\pi}{4} - \frac{\pi}{4}, \omega\pi - \frac{\pi}{4} \right)$.

由 $g(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{4}, \pi \right)$ 上没有零点,

$$\text{得} \begin{cases} \frac{\omega\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \geq k\pi, \\ \omega\pi - \frac{\pi}{4} \leq (k+1)\pi, \end{cases} \quad k \in \mathbf{Z},$$

$$\text{即} \begin{cases} 4k+1 \leq \omega \leq k + \frac{5}{4}, \\ 4k+1 \leq k + \frac{5}{4}, \end{cases} \quad k \in \mathbf{Z}, \text{ 又 } \omega > 0, \text{ 所}$$

以 $0 < \omega \leq \frac{1}{4}$ 或 $1 \leq \omega \leq \frac{5}{4}$.

6. 【解】 (1) 设 $f(x)$ 的最小正周期为 T , 由

题意, $\frac{T}{2} = \frac{\pi}{6} - \left(-\frac{\pi}{3} \right) = \frac{\pi}{2}$, 则 $T = \pi$, 设

$\omega > 0$, 则 $\frac{2\pi}{\omega} = \pi$, 则 $\omega = 2$, 所以 $f(x) = \sin(2x + \varphi)$,

显然 $\sin \left(2 \times \frac{\pi}{6} + \varphi \right) = -1$, 则 $2 \times \frac{\pi}{6} + \varphi = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, 可得 $\varphi = -\frac{5\pi}{6} +$

$2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, 所以 $f(x) = \sin \left(2x - \frac{5\pi}{6} \right)$ 是满足题意的一个解析式 (答案不唯一).

(2) 将 $f(x)$ 的图象先向右平移 $\frac{7\pi}{12}$ 个单位

长度, 得到 $y = \sin \left[2 \left(x - \frac{7\pi}{12} \right) - \frac{5\pi}{6} \right] = \sin(2x - 2\pi) = \sin 2x$ 的图象, 再把所得图

象上各点的横坐标伸长为原来的 2 倍, 纵坐标不变, 得到 $h(x) = \sin x$ 的图象,



所以 $p[h(x)-1] \cdot \left[h\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-1\right] < h(2x)$, 即 $p(\sin x-1)\left[\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-1\right] < \sin 2x$, 即 $p(\sin x-1)(\cos x-1) < \sin 2x$, 即 $p[\sin x \cos x - (\sin x + \cos x) + 1] < 2\sin x \cos x$.

令 $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$,

$x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 则 $x + \frac{\pi}{4} \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$, 所以 $t \in (1, \sqrt{2}]$.

$\sin x \cos x = \frac{t^2-1}{2}$, 当 $t \in (1, \sqrt{2}]$ 时, $p <$

$\frac{2(t+1)}{t-1} = 2 \cdot \left(1 + \frac{2}{t-1}\right)$ 恒成立, 由 $y = 1 +$

$\frac{2}{t-1}$ 在 $t \in (1, \sqrt{2}]$ 上单调递减, 可知 $y =$

$1 + \frac{2}{t-1} (1 < t \leq \sqrt{2})$ 的最小值为 $1 + \frac{2}{\sqrt{2}-1} =$

$3 + 2\sqrt{2}$, 所以 $p < 6 + 4\sqrt{2}$, 故实数 p 的取值范围为 $(-\infty, 6 + 4\sqrt{2})$.

5.7 三角函数的应用



对点上分

1. D 【解析】因为 y 与 t 的函数关系式为

$y = \frac{1}{1000} \sin \omega t$, 设 T 为其最小正周期, 则

$\frac{1}{4}T = \frac{1}{800}$, 所以 $T = \frac{1}{200}$, 所以 $\omega = \frac{2\pi}{T} =$

400π . 故 D 正确.

2. 1 【解析】 $\because S = 6\sin\left(2\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$, \therefore 单摆

来回摆动一次所需的时间为 $T = \frac{2\pi}{2\pi} =$

1(秒).

3. C 【解析】 \because 函数的最小正周期为 $T =$

60, $\therefore \omega = \frac{2\pi}{60} = \frac{\pi}{30}$. 设所求函数的解析式

为 $y = \sin\left(-\frac{\pi}{30}t + \varphi\right)$,

 **提示:** 秒针按顺时针方向走动

\therefore 初始位置为 $P_0\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$, \therefore 当 $t = 0$

时, $y = \frac{1}{2}$, $\therefore \sin \varphi = \frac{1}{2}$, $\therefore \varphi$ 可取 $\frac{\pi}{6}$,

\therefore 函数解析式可以为 $y = \sin\left(-\frac{\pi}{30}t + \frac{\pi}{6}\right)$



$\frac{\pi}{6}$). 故 C 正确.

4. $\frac{\pi}{2}$ 【解析】由题意可知, 轮子的半径 $r =$

0.5 m, 则轮子滚动一周的水平距离为 $2\pi r = \pi$ (m), 如图所示, O 为轮子中心,

设轮子滚动了 x m 后轮子外边沿上的点 A 到达点 A' 位置, 即 $\widehat{AOA'} = x$, 所以

$\angle AOA' = \frac{x}{r} = 2x$, 过点 A' 作 $A'C$ 垂直地

面, 过点 O 作 $OB \perp A'C$ 于点 B ,

则 $A'C = A'B + BC = \frac{1}{2} \sin \left(2x - \frac{\pi}{2} \right) +$

$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x$,

所以 $h(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x$.

由 $h(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x = 0.5$, 可得

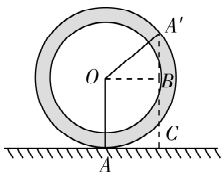
$\cos 2x = 0$, 所以 $2x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 解

得 $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$, 令 $x_1 = \frac{\pi}{4} +$

$\frac{k_1\pi}{2}, k_1 \in \mathbf{Z}, x_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{k_2\pi}{2}, k_2 \in \mathbf{Z}$, 且

$k_1 < k_2$, 所以 $x_2 - x_1 = \frac{(k_2 - k_1)\pi}{2}, k_1, k_2 \in \mathbf{Z}$,

所以当 $k_2 - k_1 = 1$ 时, $x_2 - x_1$ 取最小值 $\frac{\pi}{2}$.



5. 【解】(1) 设 1 号座舱 (M 点) 与地面的距

离 h 与时间 t 的函数关系式为 $h(t) =$

$A \sin(\omega t + \varphi) + b$ ($A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \pi, t \geqslant$

0), 依题意可得 $A = 30, b = 32$, 则 $h(t) =$

$30 \sin(\omega t + \varphi) + 32$.

依题意, $T = 24$ 分钟, $\therefore \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{12}$.

由题知, $h(0) = 30 \sin \varphi + 32 = 32$, 解得 $\varphi =$

$0, \therefore h(t) = 30 \sin \frac{\pi}{12} t + 32$ ($t \geqslant 0$).

(2) 令 $h(t) = 17$, 即 $30 \sin \frac{\pi}{12} t + 32 = 17$, 则

$\sin \frac{\pi}{12} t = -\frac{1}{2}, \because 0 \leqslant t \leqslant 24, \therefore 0 \leqslant \frac{\pi}{12} t \leqslant$



$2\pi, \therefore \frac{\pi}{12}t = \frac{7\pi}{6}$ 或 $\frac{\pi}{12}t = \frac{11\pi}{6}$, 解得 $t = 14$ 或 $t = 22$, 故当 $t = 14$ 分钟或 $t = 22$ 分钟时, 1 号座舱与地面的距离为 17 米.

6. A 【解析】依题意, $\begin{cases} A+b=15, \\ -A+b=9, \end{cases}$

解得 $\begin{cases} A=3, \\ b=12, \end{cases} \therefore$ 最小正周期 $T = \frac{2\pi}{\omega} = 12$,

$$\therefore \omega = \frac{\pi}{6}.$$

$$\text{又} \because f(3) = 15, \therefore 3\sin\left(\frac{3}{6}\pi + \varphi\right) + 12 =$$

$$15, \therefore \sin\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = 1.$$

$$\therefore \varphi = 2k\pi (k \in \mathbf{Z}), \text{不妨令 } \varphi = 0, \therefore y =$$

$$3\sin \frac{\pi}{6}t + 12. \text{故 A 正确.}$$

7. B 【解析】由题意可知 $\begin{cases} b+a=126, \\ b-a=78, \end{cases}$ 解得

$$b = 102, a = 24.$$

$$\text{又 } \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \times \frac{4}{3} = \frac{8\pi}{3}, \text{得 } p(t) =$$

$$24\sin \frac{8\pi}{3}t + 102.$$

$$\text{令 } 90 \leq 24\sin \frac{8\pi}{3}t + 102 \leq 114, \text{得 } -\frac{1}{2} \leq$$

$$\sin \frac{8\pi}{3}t \leq \frac{1}{2}.$$

$$\text{令 } x = \frac{8\pi}{3}t, x \in [0, 2\pi], \text{则 } -\frac{1}{2} \leq \sin x \leq$$

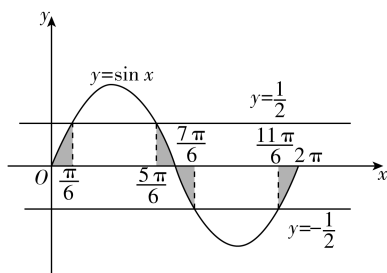
$$\frac{1}{2}, \text{函数 } y = \sin x, x \in [0, 2\pi] \text{ 的图象如}$$

图所示, 由图可知, 此人的血压在 $[90,$

$$114] \text{ 之间的时长约为 } \left[\frac{\pi}{6} + \left(\frac{7\pi}{6} - \right.$$

$$\left. \frac{5\pi}{6} \right) + \left(2\pi - \frac{11\pi}{6} \right) \right] \times \frac{3}{8\pi} = 0.25(\text{s}). \text{故}$$

B 正确.



8. B 【解析】由题可知小球运动的周期

$$T = 2 \text{ 秒, 又 } \omega > 0, \text{所以 } \frac{2\pi}{\omega} = 2, \text{解得 } \omega = \pi,$$



当 $t=0$ 秒时, $A \sin \varphi = -A$, 即 $\sin \varphi = -1$, 又

$|\varphi| < \pi$, 所以 $\varphi = -\frac{\pi}{2}$, 则 $h(t) =$

$A \sin \left(\pi t - \frac{\pi}{2} \right) = -A \cos \pi t$, 故 A 错误;

因为 $h(9) = -A \cos 9\pi = A$, $h\left(\frac{5}{3}\right) =$

$-A \cos \frac{5}{3}\pi = -\frac{1}{2}A$, 所以 $t=9$ 秒与 $t=\frac{5}{3}$

秒时小球偏离于平衡位置的距离之比为

$\frac{A}{\left| -\frac{1}{2}A \right|} = 2$, 故 B 正确;

若 $0 < t < t_0$, 则 $0 < \pi t < \pi t_0$, 又当 $0 < t < t_0$ 时,

小球有且只有三次到达最高点, 所以

$5\pi < \pi t_0 \leq 7\pi$, 解得 $5 < t_0 \leq 7$, 即 $t_0 \in (5,$

$7]$, 故 C 错误;

因为 $h(t) = -A \cos \pi t$, 令 $t_1 = \frac{1}{4}$, $t_2 = \frac{3}{4}$,

则 $h(t_1) = -A \cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}A$, $h(t_2) =$

$-A \cos \frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}A$, 满足 $0 < t_1 < t_2 < 2$ 且 t_1, t_2

时刻小球偏离于平衡位置的距离相同,

此时 $\sin\left(\frac{\pi}{t_1+t_2}\right) = \sin \pi = 0$, 故 D 错误. 故

选 B.

9. 2 : 1 $x_2 = -2\cos \frac{t}{2} + 2$ (答案不唯一)

【解析】因为做圆周运动的质点在时间

t 内运动经过的弧长 $l = (\omega t)r$, r 为圆的

半径, 且 P_1 和 P_2 在相同时间内运动经

过的弧长相等, 所以 P_1 和 P_2 运动的角

速度绝对值之比等于齿轮 A 和 B 半径之

比的倒数, 即 2 : 1, 所以周期之比为 1 :

2, 二者的旋转方向相反.

设 $x_2 = a \cos(\omega_2 t + \varphi) + b$ ($a > 0$), 由 $y_1 =$

$\sin t$ 可知 $\omega_2 = -\frac{1}{2}$.

又因为 y_1 的值域为 $[-1, 1]$, 所以齿轮 A

的半径为 1, x_2 的取值范围为 $[0, 4]$.

所以 $[b-a, a+b] = [0, 4]$, 解得 $a = b = 2$.

当 $t=0$ 时, $2\cos \varphi + 2 = 0$, 可取 $\varphi = \pi$,

所以 $x_2 = 2\cos\left(-\frac{1}{2}t + \pi\right) + 2$, 即 $x_2 =$

$-2\cos \frac{t}{2} + 2$ (答案不唯一).



10. 【解】(1) 因为 $y=f(t)$ 图象上最低点坐标为 $(2, -4)$, 最高点坐标为 $(14, 12)$,

所以 $A = \frac{12 - (-4)}{2} = 8$, 设 $f(t)$ 的最小正

周期为 T , 则 $\frac{T}{2} = 14 - 2 = 12, b =$

$$\frac{12 - 4}{2} = 4,$$

由 $T = \frac{2\pi}{\omega} = 24$, 解得 $\omega = \frac{\pi}{12}$, 将 $(14, 12)$

代入解析式, 有 $8\sin\left(\frac{\pi}{12} \times 14 + \varphi\right) + 4 = 12$,

故 $\frac{\pi}{12} \times 14 + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2k_0\pi, k_0 \in \mathbf{Z}$, 解得

$$\varphi = -\frac{2\pi}{3} + 2k_0\pi, k_0 \in \mathbf{Z},$$

由 $|\varphi| < \pi$, 得 $\varphi = -\frac{2\pi}{3}$, 所以 $f(t) =$

$$8\sin\left(\frac{\pi}{12}t - \frac{2}{3}\pi\right) + 4, 0 \leq t \leq 24.$$

(2) 令 $8\sin\left(\frac{\pi}{12}t - \frac{2}{3}\pi\right) + 4 < 0$,

$$\text{得 } \sin\left(\frac{\pi}{12}t - \frac{2}{3}\pi\right) < -\frac{1}{2},$$

$$\text{所以 } \frac{7\pi}{6} + 2k\pi < \frac{\pi}{12}t - \frac{2}{3}\pi < \frac{11}{6}\pi +$$

$$2k\pi, k \in \mathbf{Z}, \text{ 解得 } 22 + 24k < t < 30 + 24k, k \in \mathbf{Z},$$

因为 $0 \leq t \leq 24$, 所以 $0 \leq t < 6, 22 < t \leq 24$,
所以该商场的中央空调在该天内开启的时长为 8 h.

真题上分

1. B 【解析】由 $\sin^2\alpha + \sin^2\beta = 1$, 得 $\sin^2\alpha = 1 - \sin^2\beta = \cos^2\beta$, 所以 $\sin\alpha = \cos\beta$ 或 $\sin\alpha = -\cos\beta$, 充分性不成立.

易错: 注意等式两边开方后会有两种情况

由 $\sin\alpha + \cos\beta = 0$, 得 $\sin\alpha = -\cos\beta$, 即 $\sin^2\alpha = \cos^2\beta$, 又 $\cos^2\beta = 1 - \sin^2\beta$, 所以 $\sin^2\alpha = 1 - \sin^2\beta$, 即 $\sin^2\alpha + \sin^2\beta = 1$, 必要性成立. 所以 “ $\sin^2\alpha + \sin^2\beta = 1$ ” 是 “ $\sin\alpha + \cos\beta = 0$ ” 的必要不充分条件, 即甲是乙的必要条件但不是充分条件. 故选 B.

2. $\frac{5\pi}{12}$ (满足 $\theta = \frac{5\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$ 即可)



【解析】由题意知
$$\begin{cases} \cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) = -\cos \theta, \\ \sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) = \sin \theta, \end{cases}$$

即
$$\begin{cases} \cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) = \cos(\pi - \theta), \\ \sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) = \sin(\pi - \theta), \end{cases} \quad \text{所以 } \theta + \frac{\pi}{6} = \pi - \theta + 2k\pi, k \in \mathbf{Z},$$

解得 $\theta = \frac{5\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$ (写出其中之一即可).

3. B 【解析】 $\because \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} = \frac{1}{1 - \tan \alpha} = \sqrt{3},$

$\therefore \tan \alpha = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3},$

$\therefore \tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan \alpha + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan \alpha \tan \frac{\pi}{4}} =$

$\frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3} + 1}{1 - \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)} = 2\sqrt{3} - 1,$ 故选 B.

4. D 【解析】因为 $\cos \alpha = 1 -$

$2\sin^2 \frac{\alpha}{2}, \cos \alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{4},$ 所以 $\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{3 - \sqrt{5}}{8}.$

又因为 α 为锐角, 所以 $\frac{\alpha}{2}$ 为锐角, 则

$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{8}} = \sqrt{\frac{6 - 2\sqrt{5}}{16}} =$
 $\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5} - 1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4},$ 故选 D.

5. $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ 【解析】 $\because \tan \alpha + \tan \beta = 4,$

$\tan \alpha \tan \beta = \sqrt{2} + 1,$

$\therefore \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{4}{-\sqrt{2}} = -2\sqrt{2}.$

$\therefore 2k_1\pi < \alpha < 2k_1\pi + \frac{\pi}{2}, k_1 \in \mathbf{Z},$

$2k_2\pi + \pi < \beta < 2k_2\pi + \frac{3\pi}{2}, k_2 \in \mathbf{Z},$

$\therefore 2(k_1 + k_2)\pi + \pi < \alpha + \beta < 2(k_1 + k_2)\pi + 2\pi, k_1, k_2 \in \mathbf{Z}, \therefore \sin(\alpha + \beta) < 0.$

$\therefore \begin{cases} \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \tan(\alpha + \beta), \\ \sin^2(\alpha + \beta) + \cos^2(\alpha + \beta) = 1, \end{cases}$



$$\therefore \sin(\alpha+\beta) = -\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

- 6. D** 【解析】 $\because f(x) = a(x+1)^2 - 1$,
 $g(x) = \cos x + 2ax$, 曲线 $y = f(x)$ 与 $y = g(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上恰有一个交点, 令
 $h(x) = f(x) - g(x) = ax^2 - \cos x + a - 1$,
 $\therefore h(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上恰有一个零点. 又易知 $h(x)$ 为 $(-1, 1)$ 上的偶函数,
 $\therefore h(0) = 0$, 即 $a - 2 = 0$, $\therefore a = 2$. 故选 D.

一题多解

当 $a = -1$ 时, $f(x) - g(x) = -x^2 - \cos x - 2$, 当 $x \in (-1, 1)$ 时, $f(x) - g(x) < 0$, \therefore 曲线 $y = f(x)$ 与 $y = g(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上没有交点, 故 A 错误.

当 $a = \frac{1}{2}$ 时, $f(x) - g(x) = \frac{1}{2}x^2 - \cos x - \frac{1}{2}$, 当 $x \in (-1, 1)$ 时, $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} < 0$, $-\cos x < 0$, $\therefore f(x) - g(x) < 0$, \therefore 曲线 $y = f(x)$ 与 $y = g(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上没有交点, 故 B 错误.

当 $a = 1$ 时, $f(x) - g(x) = x^2 - \cos x$, 令 $m(x) = f(x) - g(x)$, 则 $m(x)$ 为偶函数, 且在 $(-1, 0)$ 上单调递减, 在 $(0, 1)$ 上单调递增. 又 $m(0) = -1 < 0$, $m(1) = 1 - \cos 1 > 0$, $m(-1) = 1 - \cos 1 > 0$, 由函数零点存在定理可知 $m(x)$ 在 $(-1, 0)$ 和 $(0, 1)$ 上各有 1 个零点, 即曲线 $y = f(x)$ 与 $y = g(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上有 2 个交点, 故 C 错误.

当 $a = 2$ 时, $f(x) - g(x) = 2x^2 - \cos x + 1$. 令 $n(x) = f(x) - g(x)$, 则 $n(x)$ 为偶函数, 且在 $(-1, 0)$ 上单调递减, 在 $(0, 1)$ 上单调递增. 又 $n(0) = 0$, \therefore 曲线 $y = f(x)$ 与 $y = g(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上只有 1 个交点, 故 D 正确. 故选 D.

- 7. C** 【解析】令 $3x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k_1\pi, k_1 \in \mathbf{Z}$,

$$\text{则 } x = \frac{2\pi}{9} + \frac{k_1\pi}{3}, k_1 \in \mathbf{Z},$$

$$\text{又 } x \in [0, 2\pi], \text{ 所以 } x = \frac{2\pi}{9}, \frac{5\pi}{9}, \frac{8\pi}{9}, \frac{11\pi}{9}, \frac{14\pi}{9}, \frac{17\pi}{9}.$$

$$\text{令 } 3x - \frac{\pi}{6} = k_2\pi, k_2 \in \mathbf{Z}, \text{ 则 } x = \frac{\pi}{18} +$$



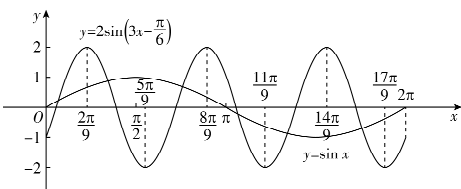
$$\frac{k_2\pi}{3}, k_2 \in \mathbf{Z},$$

又 $x \in [0, 2\pi]$, 所以 $x = \frac{\pi}{18}, \frac{7\pi}{18}, \frac{13\pi}{18},$

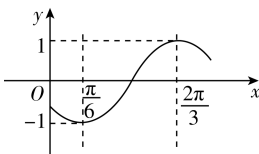
$\frac{19\pi}{18}, \frac{25\pi}{18}, \frac{31\pi}{18}$, 如图, 作出函数 $y = \sin x$

与 $y = 2\sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)$ 在 $[0, 2\pi]$ 上的大致

图象, 由图可知, 两函数图象共有 6 个交点. 故选 C.



8. D 【解析】由题意画出 $f(x)$ 图象的简图(如图).



因为函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right)$ 单调递增, 且直线 $x = \frac{\pi}{6}$ 和直

线 $x = \frac{2\pi}{3}$ 为函数 $y = f(x)$ 的图象的两条对

称轴, 所以 $\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{T}{2}, f\left(\frac{\pi}{6}\right) = -1$, 所

以 $T = \pi$, 即 $|\omega| = \frac{2\pi}{T} = 2$, 则 $\omega = 2$ 或 -2 .

而 $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = -1$, 即 $\sin\left(2 \times \frac{\pi}{6} + \varphi\right) = -1$

提示: $\frac{\pi}{6}$ 为函数 $f(x)$ 的极小值点

或 $\sin\left(-2 \times \frac{\pi}{6} + \varphi\right) = -1$, 所以 $2 \times \frac{\pi}{6} +$

$\varphi = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ 或 $-2 \times \frac{\pi}{6} + \varphi = -\frac{\pi}{2} +$

$2k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 即 $\varphi = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ 或 $-\frac{\pi}{6} +$

$2k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 所以 $f(x) = \sin\left(2x - \frac{5\pi}{6}\right)$ 或

$f(x) = \sin\left(-2x - \frac{\pi}{6}\right)$, 所以 $f\left(-\frac{5\pi}{12}\right) =$

$\sin\left(-\frac{5\pi}{6} - \frac{5\pi}{6}\right) = \sin\left(-\frac{5\pi}{3}\right) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

或 $f\left(-\frac{5\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 故

选 D.



9. A 【解析】因为函数 $f(x)$ 的图象关于点

$\left(\frac{3\pi}{2}, 2\right)$ 中心对称, 所以 $b = 2$, 且

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}\omega + \frac{\pi}{4}\right) = 0, \text{ 所以 } \frac{3\pi}{2}\omega + \frac{\pi}{4} =$$

$$k\pi, k \in \mathbf{Z}, \text{ 即 } \omega = -\frac{1}{6} + \frac{2}{3}k, k \in \mathbf{Z}.$$

$$\text{又 } \frac{2\pi}{3} < T < \pi, \text{ 则 } 2 < \omega < 3, \text{ 解得 } \omega = \frac{5}{2}.$$

所以 $f(x) = \sin\left(\frac{5}{2}x + \frac{\pi}{4}\right) + 2$, 从而

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin \frac{3\pi}{2} + 2 = 1, \text{ 故选 A.}$$

10. BC 【解析】对于 A, 令 $f(x) = 0$, 则

$$2x = k_1\pi (k_1 \in \mathbf{Z}), \text{ 解得 } x = \frac{k_1\pi}{2} (k_1 \in \mathbf{Z}),$$

$$\text{令 } g(x) = 0, \text{ 则 } 2x - \frac{\pi}{4} = k_2\pi (k_2 \in \mathbf{Z}),$$

$$\text{解得 } x = \frac{\pi}{8} + \frac{k_2\pi}{2} (k_2 \in \mathbf{Z}), \text{ 因此 } f(x) \text{ 与}$$

$g(x)$ 无相同零点, 故 A 错误;

对于 B, $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大值都为 1,

故 B 正确;

对于 C, $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最小正周期都是

$$\frac{2\pi}{2} = \pi, \text{ 故 C 正确;}$$

$$\text{对于 D, 令 } 2x = \frac{\pi}{2} + k_3\pi (k_3 \in \mathbf{Z}), \text{ 得 } x =$$

$$\frac{\pi}{4} + \frac{k_3\pi}{2} (k_3 \in \mathbf{Z}), \text{ 令 } 2x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} +$$

$$k_4\pi (k_4 \in \mathbf{Z}), \text{ 得 } x = \frac{3}{8}\pi + \frac{k_4\pi}{2} (k_4 \in \mathbf{Z}),$$

故 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象无相同的对称

轴, 故 D 错误. 故选 BC.

11. $[2, 3)$ 【解析】令 $f(x) = \cos \omega x - 1 = 0$,

得 $\cos \omega x = 1$, 又 $x \in [0, 2\pi]$, 则

$\omega x \in [0, 2\omega\pi]$, 令 $t = \omega x \in [0, 2\omega\pi]$, 因

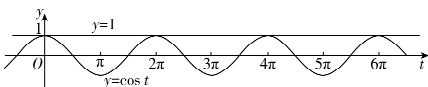
为 $f(x)$ 在 $[0, 2\pi]$ 有且仅有 3 个零点,

所以 $y = \cos t$ 的图象与直线 $y = 1$ 在 $[0,$

$2\omega\pi]$ 有且仅有 3 个交点, 如图, 所以

$4\pi \leq 2\omega\pi < 6\pi$, 解得 $2 \leq \omega < 3$, 即 ω 的取

值范围是 $[2, 3)$.





一题多解 令 $f(x) = \cos \omega x - 1 = 0 (\omega > 0)$, 得 $\cos \omega x = 1$, 即 $\omega x = 2k\pi (\omega > 0)$, $k \in \mathbf{Z}$, 解得 $x = \frac{2k\pi}{\omega} (\omega > 0)$, $k \in \mathbf{Z}$.

因为 $f(x)$ 在区间 $[0, 2\pi]$ 有且仅有 3 个零点, 且 $f(0) = 0$, 所以 $f(x)$ 的 3 个零点对应 $k = 0, 1, 2$, 所以 $f\left(\frac{2\pi}{\omega}\right) = f\left(\frac{4\pi}{\omega}\right) = 0$ 且 $\frac{4\pi}{\omega} \leq 2\pi < \frac{6\pi}{\omega}$, 解得 $2 \leq \omega < 3$, 即 ω 的取值范围是 $[2, 3)$.

12. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 【解析】设 $A\left(x_1, \frac{1}{2}\right), B\left(x_2, \frac{1}{2}\right)$, 由五点作图法可

$$\text{得} \begin{cases} \omega x_1 + \varphi = \frac{\pi}{6}, & \text{①} \\ \omega x_2 + \varphi = \frac{5\pi}{6}. & \text{②} \end{cases}$$

$$\text{②} - \text{①}, \text{得 } \omega(x_2 - x_1) = \frac{2\pi}{3}.$$

因为 $|AB| = \frac{\pi}{6}$, 所以 $x_2 - x_1 = \frac{\pi}{6}$, 所以 $\omega = 4$.

因为函数 $f(x)$ 的图象经过点 $\left(\frac{2\pi}{3}, 0\right)$,

所以 $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{8\pi}{3} + \varphi\right) = 0$, 所以

$$\frac{8\pi}{3} + \varphi = 2k\pi, k \in \mathbf{Z}, \text{解得 } \varphi = -\frac{8\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}.$$

由题图可知 $-1 < f(0) < 0$, 即 $-1 < \sin \varphi < 0$,

所以取 $k = 1$, 则 $\varphi = -\frac{2\pi}{3}$, 所以 $f(x) =$

$$\sin\left(4x - \frac{2\pi}{3}\right), \text{所以 } f(\pi) = \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

素养上分

1. A 【解析】设圆的半径为 r , 剪下的扇形的圆心角为 α , 则圆面剩余部分的圆心

角为 $2\pi - \alpha$, 由题意可得 $\frac{\frac{1}{2}\alpha r^2}{\frac{1}{2}(2\pi - \alpha)r^2} =$

$\frac{\alpha}{2\pi - \alpha} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$, 解得 $\alpha = (3 - \sqrt{5})\pi$. 故选 A.



2. CD 【解析】对于 A, 因为筒车按逆时针方向每旋转一周用时 60 秒, 所以筒车转动的角速度 $\omega = \frac{2\pi}{60} = \frac{\pi}{30}$ (弧度/秒), 故 A 错误;

对于 B, $R = \sqrt{3^2 + (-3\sqrt{3})^2} = 6$, 由 $f(0) = 6\sin \varphi = -3\sqrt{3}$ 得 $\sin \varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, 又 $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$, 所以 $\varphi = -\frac{\pi}{3}$, 所以 $y = f(t) = 6\sin\left(\frac{\pi}{30}t - \frac{\pi}{3}\right)$, 当筒车旋转 50 秒时, $y = f(50) = 6\sin\left(\frac{5\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = -3\sqrt{3}$, 故 B 错误;

对于 C, 由 B 可知当筒车旋转 50 秒时, $y = f(50) = 6\sin\left(\frac{5\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = -3\sqrt{3}$, 又 $50 < 60$, 所以此时盛水筒 M 对应的点 P 与 P_0 关于 y 轴对称, 这意味着盛水筒 M 和初始点 P_0 的水平距离为 $2x_{P_0} = 6$, 故 C 正确;

对于 D, 注意到 $y = f(t) = 6\sin\left(\frac{\pi}{30}t - \frac{\pi}{3}\right) \leq 6$, 且 $f(25) = 6\sin\left(\frac{5}{6}\pi - \frac{\pi}{3}\right) = 6$, 故筒车在 $(0, 60]$ 秒的旋转过程中, 盛水筒 M 最高点到 x 轴的距离的最大值为 6, 故 D 正确. 故选 CD.

3. $\left[-\frac{1}{2} - \sqrt{2}, 1\right]$ 【解析】由题意可得,

$$F(x) = \sin x + \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}\sin(2x + \pi) = \sin x + \cos x - \frac{1}{2}\sin 2x, \text{ 令 } \sin x + \cos x = t, t \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}], \text{ 则 } 1 + \sin 2x = t^2,$$

$$\text{设 } h(t) = t - \frac{1}{2}(t^2 - 1) = -\frac{1}{2}t^2 + t + \frac{1}{2}, t \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}], \text{ 结合二次函数的性质易得 } h(t) \in \left[-\frac{1}{2} - \sqrt{2}, 1\right], \text{ 即 } F(x) \text{ 的值域为 } \left[-\frac{1}{2} - \sqrt{2}, 1\right].$$

4. C 【解析】因为 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, 所以 $0 \leq \sin x \leq 1, 0 \leq \cos x \leq 1$,

设 $y = \sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}$, 则 $y^2 = \sin x + 2\sqrt{\sin x \cdot \cos x} + \cos x$.



$$\text{设 } t = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right),$$

$$\text{当 } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ 时, } x + \frac{\pi}{4} \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right],$$

$$\text{则 } t \in [1, \sqrt{2}],$$

$$\text{且 } \sin x \cdot \cos x = \frac{t^2 - 1}{2}.$$

$$\text{所以 } y^2 = t + 2\sqrt{\frac{t^2 - 1}{2}} = t + \sqrt{2}\sqrt{t^2 - 1},$$

$$t \in [1, \sqrt{2}].$$

$$\text{设 } g(t) = t + \sqrt{2}\sqrt{t^2 - 1}, \text{ 易知在 } [1, \sqrt{2}] \text{ 上,}$$

$$g(t) = t + \sqrt{2}\sqrt{t^2 - 1} \text{ 单调递增,}$$

$$\text{又 } g(1) = 1, g(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}, \text{ 所以 } 1 \leq y^2 \leq 2\sqrt{2},$$

$$\text{又 } y > 0, \text{ 所以 } 1 \leq y \leq \sqrt{2\sqrt{2}} = \sqrt[4]{8}. \text{ 故选 C.}$$

5. $\frac{(4k+1)}{8}\pi, k \in \mathbf{Z}$ 【解析】因为 $\{\sin \theta,$

$$\sin 2\theta, \sin 3\theta\} = \{\cos \theta, \cos 2\theta, \cos 3\theta\},$$

$$\text{所以 } \sin \theta + \sin 2\theta + \sin 3\theta = \cos \theta + \cos 2\theta + \cos 3\theta,$$

$$\text{由和差化积公式得, } \sin \theta + \sin 3\theta =$$

$$2\sin \frac{\theta+3\theta}{2} \cos \frac{\theta-3\theta}{2} = 2\sin 2\theta \cos (-\theta) =$$

$$2\sin 2\theta \cos \theta,$$

$$\cos \theta + \cos 3\theta = 2\cos \frac{\theta+3\theta}{2} \cos \frac{\theta-3\theta}{2} =$$

$$2\cos 2\theta \cos (-\theta) = 2\cos 2\theta \cos \theta,$$

$$\text{所以 } \sin \theta + \sin 2\theta + \sin 3\theta = 2\sin 2\theta \cos \theta +$$

$$\sin 2\theta = \sin 2\theta(2\cos \theta + 1),$$

$$\cos \theta + \cos 2\theta + \cos 3\theta = 2\cos 2\theta \cos \theta +$$

$$\cos 2\theta = \cos 2\theta(2\cos \theta + 1),$$

$$\text{所以 } \sin 2\theta(2\cos \theta + 1) = \cos 2\theta(2\cos \theta +$$

$$1), \text{ 所以 } \sin 2\theta = \cos 2\theta \text{ 或 } \cos \theta = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{当 } \cos \theta = -\frac{1}{2} \text{ 时, } \theta = \frac{2\pi}{3} + 2k_1\pi, k_1 \in \mathbf{Z} \text{ 或}$$

$$\frac{4\pi}{3} + 2k_2\pi, k_2 \in \mathbf{Z}, \text{ 此时 } \cos \theta = \cos 2\theta =$$

$$-\frac{1}{2}, \text{ 不满足集合中元素的互异性, 故}$$

舍去;

$$\text{当 } \sin 2\theta = \cos 2\theta \text{ 时, } 2\theta = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z},$$

$$\text{所以 } \theta = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}, \text{ 满足题意.}$$

$$\text{综上, } \theta = \frac{(4k+1)}{8}\pi, k \in \mathbf{Z}.$$



6.0 或-1 【解析】函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} ,

$$f\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\sin\left[3\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\right]=-\cos x\cos 3x,$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\sin\left[3\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right]=-\cos x\cos 3x,$$

$$\text{所以 } f\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=f\left(\frac{\pi}{2}-x\right),$$

所以 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{2}$ 对称.

$$\text{易得 } f(0)=f(\pi)=0, f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1,$$

因为关于 x 的方程 $f(x)=a$ 在 $(0, \pi]$ 上有奇数个不同的实数解, 所以 $y=f(x)$ 和 $y=a$ 的图象在 $(0, \pi]$ 上有奇数个不同的

交点, 因为 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{2}$

对称, 所以当 $a=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$ 时, $y=f(x)$

与 $y=a$ 的图象在 $(0, \pi]$ 上有奇数个不同的交点;

因为区间 $(0, \pi]$ 是半开半闭区间,

所以当 $a=f(\pi)=0$ 时, $y=f(x)$ 与 $y=a$ 的图象在 $(0, \pi]$ 上有奇数个不同的交点.

综上, a 的值为 0 或 -1.

第五章

全章上分

1. B 【解析】例如 480° 角是第二象限角且大于 90° , 但不是钝角, 故 A 错误;

由钝角一定大于 90° , 但大于 90° 的角不一定是钝角, 可知 B 是 C 的真子集, 故 B 正确, D 错误;

例如 -210° 角是第二象限角, 但小于 90° , 故 C 错误. 故选 B.

2. D 【解析】 $\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha-3}$

$$=\frac{2\sin \alpha \cos \alpha}{\cos ^2 \alpha-\sin ^2 \alpha-3 \cos ^2 \alpha-3 \sin ^2 \alpha}$$

$$=\frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{-2 \cos ^2 \alpha-4 \sin ^2 \alpha}$$

$$=\frac{\tan \alpha}{-1-2 \tan ^2 \alpha}$$

$$=\frac{-\frac{1}{2}}{-1-2 \times \frac{1}{4}}=\frac{1}{3}.$$

故选 D.

3. D 【解析】对于 A, 由二倍角公式可得 $\cos 2^\circ = 1 - 2\sin^2 1^\circ$;

对于 B, 由二倍角公式可得 $\cos 2^\circ = 2\cos^2 1^\circ - 1$;

对于 C, 因为 $\tan 2^\circ = \frac{\sin 2^\circ}{\cos 2^\circ}$, 所以

$$\frac{\sin 2^\circ}{\tan 2^\circ} = \cos 2^\circ;$$

对于 D, 由二倍角公式可得 $2\sin 1^\circ \cdot \cos 1^\circ = \sin 2^\circ \neq \cos 2^\circ$.

故选 D.

4. D 【解析】 $f(x) = 2\sqrt{3}\sin x \cos x + 2\cos^2 x = \sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x + 1 = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + 1$, 由 $x \in [0, \pi]$ 得 $2x + \frac{\pi}{6} \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}\right]$, 当 $2x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$, 即 $x = \frac{\pi}{6}$ 时, $f(x)$ 取最大值 3, A 错误;

由正弦函数的单调性知, 当 $2x + \frac{\pi}{6} \in$

$\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$, 即 $x \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ 时, $f(x)$ 单调

递增, 当 $2x + \frac{\pi}{6} \in \left[\frac{3\pi}{2}, \frac{13\pi}{6}\right]$, 即 $x \in$

$\left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right]$ 时, $f(x)$ 单调递增, B 错误;

$f(x)$ 的定义域 $[0, \pi]$ 不关于 $x = \frac{5\pi}{12}$ 对称, C 错误;

令 $f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + 1 = 2$, 则

$$\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}, \text{ 又 } 2x + \frac{\pi}{6} \in$$

$$\left[\frac{\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}\right], \text{ 所以 } 2x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} \text{ 或 } 2x + \frac{\pi}{6} =$$

$$\frac{5\pi}{6} \text{ 或 } 2x + \frac{\pi}{6} = \frac{13\pi}{6}, \text{ 即 } x = 0 \text{ 或 } x = \frac{\pi}{3}$$

或 $x = \pi$, 故所有公共点的横坐标之和为

$$\frac{4\pi}{3}, \text{ D 正确. 故选 D.}$$

5. B 【解析】设 $y = \sin(\omega t + \varphi)$ ($\omega > 0, |\varphi| < \pi$) 的周期为 T , $t_3 - t_1 = T$, $t_4 - t_2 = T$, 根据 $t_1 + 2t_2 + t_3 = 12$, $t_2 + 2t_3 + t_4 = 28$, 可知 $2t_1 + 2t_2 + T = 12$ ①, $2t_2 + 2t_3 + T = 28$ ②, ② - ① 得 $2t_3 - 2t_1 = 2T = 16$, 所以 $T = 8$, 又 $\omega = \frac{2\pi}{T}$, 所



以 $\omega = \frac{\pi}{4}$.

令 $2k\pi + \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{4}t + \varphi < 2k\pi + \frac{5\pi}{6}, k \in \mathbf{Z}$, 可

得 $8k + \frac{2}{3} - \frac{4\varphi}{\pi} < t < 8k + \frac{10}{3} - \frac{4\varphi}{\pi}, k \in \mathbf{Z}$, 所

以在一个周期内阻尼器离开平衡位置的

位移大于 0.5 m 的总时间为 $8k + \frac{10}{3} -$

$\frac{4\varphi}{\pi} - \left(8k + \frac{2}{3} - \frac{4\varphi}{\pi}\right) = \frac{8}{3}(\text{s})$. 故选 B.

6. C 【解析】 $f(x) = 2\sin \omega x \cdot \cos^2 \left(\frac{\omega x}{2} - \right.$

$$\left. \frac{\pi}{4} \right) - \sin^2 \omega x = 2\sin \omega x \cdot \frac{1 + \cos \left(\omega x - \frac{\pi}{2} \right)}{2} -$$

$$\sin^2 \omega x = \sin \omega x (1 + \sin \omega x) - \sin^2 \omega x =$$

$\sin \omega x$. 由 $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{2} \right]$ 上单调

$$\text{递增, 得} \begin{cases} -\frac{2\pi}{5}\omega \geq -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \\ \frac{\pi}{2}\omega \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \end{cases} \quad k \in \mathbf{Z}, \text{ 即}$$

$$\begin{cases} \omega \leq \frac{5}{4} - 5k, \\ \omega \leq 1 + 4k, \end{cases} \quad k \in \mathbf{Z}, \text{ 又 } \omega > 0, \text{ 所以 } 0 <$$

$$\omega \leq 1.$$

因为在区间 $\left[-\frac{\pi}{6}, 2\pi \right]$ 上, 方程 $|f(x)| =$

1 恰好有两个不同的解, 且 $f(x)$ 在区间

$\left[-\frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{2} \right]$ 上单调递增, 当 $x \in$

$\left[-\frac{\pi}{6}, 0 \right]$ 时, $\omega x \in \left[-\frac{\pi}{6}\omega, 0 \right]$, $|f(x)| =$

1 无解, 所以 $\frac{3\pi}{2} \leq 2\pi\omega < \frac{5\pi}{2}$, 又 $0 < \omega \leq 1$,

故 $\frac{3}{4} \leq \omega \leq 1$. 故选 C.

7. ACD 【解析】因为 $\sin \alpha + \cos \alpha = -\frac{1}{5}$,

所以 $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \frac{1}{25}$, 则 $\sin^2 \alpha +$

$\cos^2 \alpha + 2\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{25}$, 即 $\sin \alpha \cos \alpha =$

$-\frac{12}{25} < 0$, 又 $\alpha \in (0, \pi)$, 所以 $\sin \alpha > 0$,

则 $\cos \alpha < 0$.

$$\text{联立} \begin{cases} \sin \alpha + \cos \alpha = -\frac{1}{5}, \\ \sin \alpha \cos \alpha = -\frac{12}{25}, \end{cases} \quad \text{解得 } \sin \alpha =$$



$\frac{3}{5}, \cos \alpha = -\frac{4}{5}$, 故 A 错误.

对于 B, $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{3}{5} - \left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{7}{5}$,

故 B 正确.

对于 C, $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{3}{4}$, 则

$$\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\tan \alpha} = \frac{-\frac{1}{5}}{-\frac{3}{4}} = \frac{4}{15}, \text{故 C 错误.}$$

对于 D, $\frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{3 \sin \alpha + 2 \cos \alpha} =$

$$\frac{\frac{3}{5} - \left(-\frac{4}{5}\right)}{3 \times \frac{3}{5} + 2 \times \left(-\frac{4}{5}\right)} = 7, \text{故 D 错误. 故}$$

选 ACD.

8. AD 【解析】因为 $\tan(25^\circ + 35^\circ) =$

$$\frac{\tan 25^\circ + \tan 35^\circ}{1 - \tan 25^\circ \tan 35^\circ} = \sqrt{3}, \text{所以 } \tan 25^\circ +$$

$$\tan 35^\circ = \sqrt{3}(1 - \tan 25^\circ \tan 35^\circ) = \sqrt{3} -$$

$$\sqrt{3} \tan 25^\circ \tan 35^\circ, \text{所以 } \tan 25^\circ + \tan 35^\circ +$$

$$\sqrt{3} \tan 25^\circ \tan 35^\circ = \sqrt{3}, \text{故 A 正确;}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 15^\circ - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 15^\circ = \sin 45^\circ \cos 15^\circ -$$

$$\cos 45^\circ \sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 15^\circ) = \sin 30^\circ =$$

$$\frac{1}{2}, \text{故 B 错误;}$$

$$\frac{2 \cos 10^\circ - \sin 20^\circ}{\cos 20^\circ}$$

$$= \frac{2 \cos(30^\circ - 20^\circ) - \sin 20^\circ}{\cos 20^\circ}$$

$$= \frac{\sqrt{3} \cos 20^\circ + \sin 20^\circ - \sin 20^\circ}{\cos 20^\circ} = \sqrt{3}, \text{故 C}$$

错误;

$$\frac{1}{\sin 10^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ} = \frac{\cos 10^\circ - \sqrt{3} \sin 10^\circ}{\sin 10^\circ \cos 10^\circ}$$

$$= \frac{2 \left(\frac{1}{2} \cos 10^\circ - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 10^\circ \right)}{\sin 10^\circ \cos 10^\circ}$$

$$= \frac{2(\sin 30^\circ \cos 10^\circ - \cos 30^\circ \sin 10^\circ)}{\frac{1}{2} \times 2 \sin 10^\circ \cos 10^\circ}$$

$$= \frac{2 \sin 20^\circ}{\frac{1}{2} \sin 20^\circ} = 4, \text{故 D 正确.}$$

故选 AD.

9. BCD 【解析】因为 $f(x-1)$ 为奇函数, 所



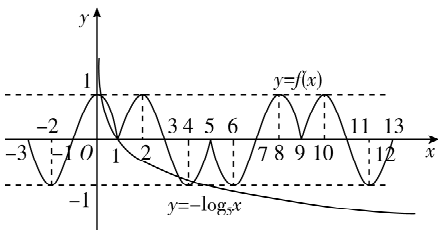
以 $f(-x-1) = -f(x-1)$, 即 $f(-x) = -f(x-2)$, 则函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(-1, 0)$ 对称, 又 $f(x+1)$ 为偶函数, 所以 $f(-x+1) = f(x+1)$, 即 $f(-x) = f(x+2)$, 则函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称, $f(x+2) = -f(x-2)$, 则有 $f(x+4) = -f(x)$, 则 $f(x+8) = f(x)$, 所以 $f(x)$ 是以 8 为周期的周期函数. 由题知 $f(0) = 1$, 将 $x=0$ 代入 $f(x+4) = -f(x)$ 中, 得 $f(4) = -f(0) = -1$, $f(4) \neq f(0)$, 故 $f(x)$ 的周期不是 4, 故 A 错误.

$$f\left(\frac{10}{3}\right) = f\left(\frac{4}{3} + 2\right) = f\left(-\frac{4}{3}\right) = f\left(\frac{2}{3} - 2\right) = -f\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{1}{2}, \text{ 故 B 正确.}$$

当 $x \in [-1, 0]$ 时, $\frac{\pi x}{2} \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$,

则 $f(x)$ 在 $[-1, 0]$ 上单调递增, 又 $f(-1) = 0$ 且 $f(x)$ 的图象关于点 $(-1, 0)$ 对称, 所以 $f(x)$ 在 $[-2, 0]$ 上单调递增, 又因为 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称, 所以 $f(x)$ 在 $(2, 4)$ 上单调递减, 故 C 正确.

方程 $f(x) + \log_5 x = 0$ 不同的解的个数, 即为函数 $y=f(x)$ 与函数 $y=-\log_5 x$ 图象的交点的个数, 如图, 作出两函数的图象, 由图可知, 两函数的图象有 4 个交点, 即方程 $f(x) + \log_5 x = 0$ 有且仅有 4 个不同的解, 故 D 正确.



故选 BCD.

10. $\frac{2\pi}{3}$ 【解析】由 $\frac{\cos A}{\cos B} = \frac{2}{1 - \tan A \tan C}$ 可

$$\text{得 } \frac{\cos A}{\cos B} = \frac{2 \cos A \cos C}{\cos A \cos C - \sin A \sin C} = \frac{2 \cos A \cos C}{\cos(A+C)}.$$

又 $\cos(A+C) = -\cos B$, $\cos A \neq 0$, 所以

$$\frac{1}{\cos B} = \frac{2 \cos C}{-\cos B}, \text{ 解得 } \cos C = -\frac{1}{2}.$$

因为 $0 < C < \pi$, 所以 $C = \frac{2\pi}{3}$.



11. - 1 【解析】根据题意, $f(x) = \frac{(e^{2x}+a)\cos x}{e^x}$ 是奇函数, 其定义域为 \mathbf{R} ,

$$\text{则 } f(0) = \frac{(1+a)\cos 0}{1} = 0, \text{ 解得 } a = -1.$$

当 $a = -1$ 时, $f(x) = \frac{(e^{2x}-1)\cos x}{e^x} = (e^x - e^{-x})\cos x$, 其定义域为 \mathbf{R} , $f(-x) = (e^{-x} - e^x)\cos(-x) = -(e^x - e^{-x})\cos x = -f(x)$, 即 $f(x)$ 为奇函数, 符合题意.

12. (1) $\frac{100+2x}{100+x}, x \in (0, 100)$ (2) 3



思路导引 (1) 利用弧长公式求

\widehat{AB} 与 \widehat{DC} , 根据扇环周长可得 θ 关于 x 的函数关系式; (2) 根据扇形面积公式求出扇环面积, 进而得出砖雕面积与雕刻费用之比, 再利用基本不等式即可求解.

【解析】(1) 由题意可知, $\angle AOB = \theta$ rad, $OA = x$ cm, $OD = 100$ cm, 所以 $\widehat{AB} = \theta x$ cm, $AD = BC = (100 - x)$ cm, $\widehat{DC} = 100\theta$ cm, 扇环周长为 $\widehat{AB} + AD + BC + \widehat{DC} = \theta x + 200 - 2x + 100\theta = 300$ (cm), 则 $\theta(x) = \frac{100+2x}{100+x}, x \in (0, 100)$.

(2) 砖雕面积即为题图中扇环面积, 记为 S , 则 $S = S_{\text{扇形}DOC} - S_{\text{扇形}AOB} = \frac{1}{2} \cdot OD \cdot \widehat{DC} - \frac{1}{2} \cdot OA \cdot \widehat{AB} = \frac{1}{2} \times 100 \times 100\theta - \frac{1}{2} \cdot x \cdot \theta x = 5\,000\theta - \frac{\theta}{2}x^2 = \left(5\,000 - \frac{x^2}{2}\right) \cdot \frac{100+2x}{100+x}$, 设砖雕面积与雕刻费用之比为 m ,

$$\text{则 } m = \frac{S}{w(x)} = \frac{(10\,000 - x^2)(100+2x)}{2(100+x)(10x+1\,700)} = \frac{(100-x)(50+x)}{10(x+170)}.$$

令 $t = x + 170$ ($170 < t < 270$), 则 $x = t - 170$,

$$\begin{aligned} \text{所以 } m &= \frac{(270-t)(t-120)}{10t} = \frac{-t^2 + 390t - 120 \times 270}{10t} = -\frac{t}{10} - \frac{12 \times 270}{t} + 39 \\ &\leq -2\sqrt{\frac{t}{10} \cdot \frac{12 \times 270}{t}} + 39 = -36 + 39 = \end{aligned}$$



3, 当且仅当 $t=180$ 时取等号, 所以砖雕面积与雕刻费用之比的最大值为 3.

13. 【解】(1) 观察题图可得 $A=2$, 函数 $f(x)$ 的最小正周期 $T = \frac{11\pi}{12} - \left(-\frac{\pi}{12}\right) = \pi = \frac{2\pi}{\omega}$, 则 $\omega=2$, 即 $f(x) = 2\sin(2x+\varphi)$.

由题图知 $f\left(-\frac{\pi}{12}\right) = 2\sin\left(-\frac{\pi}{6}+\varphi\right) = 0$,

结合题图得 $-\frac{\pi}{6}+\varphi = 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 即 $\varphi =$

$2k\pi + \frac{\pi}{6}, k \in \mathbf{Z}$, 而 $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$, 则 $\varphi = \frac{\pi}{6}$.

所以 $f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$.

(2) 将 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位

长度, 可得到函数 $y = 2\sin\left[2\left(x + \frac{\pi}{12}\right) + \frac{\pi}{6}\right] = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的图象, 再将所得图象上各点的横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{2}$, 纵坐标不变, 得到函数 $g(x)$ 的

图象, 则 $g(x) = 2\sin\left(4x + \frac{\pi}{3}\right)$.

当 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ 时, $\frac{\pi}{3} \leq 4x + \frac{\pi}{3} \leq \frac{4\pi}{3}$, 则

$-\sqrt{3} \leq 2\sin\left(4x + \frac{\pi}{3}\right) \leq 2$, 故 $g(x)$ 在

$\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ 上的值域为 $[-\sqrt{3}, 2]$.

14. 【解】(1) 由于点 P 在单位圆 O 上, 且 α

是锐角, 可得 $m > 0$, $m^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1$,

则 $m = \frac{1}{2}$, 所以 $\cos \alpha = \frac{1}{2}$, 又 α 为锐角,

所以 $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

(2) 原式 $= \frac{4\cos^3 \alpha + 2\cos^2 \alpha + 4\cos \alpha}{2 + 2\cos^2 \alpha + \cos \alpha} =$

$2\cos \alpha = 1$.

(3) 由 (1) 可知 $\alpha = \frac{\pi}{3}$, 根据三角函数定

义可得 $f(\theta) = \cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)$.

由 $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 得 $\theta + \frac{\pi}{6} \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right)$,

因为 $f\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{4} > 0$,



$$\text{所以 } \theta + \frac{\pi}{6} \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2} \right), \sin \left(\theta + \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt{15}}{4}.$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } & \cos \left(\theta - \frac{\pi}{3} \right) + \cos \left(\theta - \frac{5\pi}{6} \right) \\ &= \cos \left[\left(\theta + \frac{\pi}{6} \right) - \frac{\pi}{2} \right] + \cos \left[\left(\theta + \frac{\pi}{6} \right) - \pi \right] \\ &= \sin \left(\theta + \frac{\pi}{6} \right) - \cos \left(\theta + \frac{\pi}{6} \right) \\ &= \frac{\sqrt{15}-1}{4}. \end{aligned}$$

15. 【解】(1) $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2\omega x + \frac{\cos 2\omega x + 1}{2} + m = \sin \left(2\omega x + \frac{\pi}{6} \right) + \frac{1}{2} + m.$

因为它的图象的一条对称轴为直线 $x = \frac{\pi}{6}$, 所以 $2 \times \frac{\pi}{6} \omega + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbf{Z})$, 解得 $\omega = 1 + 3k (k \in \mathbf{Z})$.

又因为 $\omega \in (0, 2)$, 所以 $\omega = 1$, 所以 $f(x) = \sin \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) + \frac{1}{2} + m.$

由 $2k\pi + \frac{\pi}{2} \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq 2k\pi + \frac{3\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$, 解得 $k\pi + \frac{\pi}{6} \leq x \leq k\pi + \frac{2\pi}{3} (k \in \mathbf{Z})$,

所以函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $\left[k\pi + \frac{\pi}{6}, k\pi + \frac{2\pi}{3} \right] (k \in \mathbf{Z})$.

(2) 当 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right]$ 时, $2x + \frac{\pi}{6} \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6} \right]$.

$f(x)$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2} \right]$ 上有 2 个不同的零

点, 令 $f(x) = 0 \left(x \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right] \right)$, 即

$\sin \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) = -\frac{1}{2} - m \left(x \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right] \right)$, 根据题意有 $-\frac{1}{2} - m \in$

$\left[\frac{1}{2}, 1 \right)$, 即 $\frac{1}{2} \leq -\frac{1}{2} - m < 1$, 解得

$-\frac{3}{2} < m \leq -1$, 所以 m 的取值范围

为 $\left(-\frac{3}{2}, -1 \right]$.



(3) 当 $x \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ 时, $2x + \frac{\pi}{6} \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$, 所以 $f(0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + m = 1 + m = 1$, 解得 $m = 0$,

所以 $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{2}$.

$f(x) \geq 0$, 即 $\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{2} \geq 0$, 所以

$\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \geq -\frac{1}{2}$, 所以 $-\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq$

$2x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{7\pi}{6} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$, 解得

$-\frac{\pi}{6} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbf{Z})$,

所以使 $f(x) \geq 0$ 成立的 x 的取值集合

为 $\left\{x \mid -\frac{\pi}{6} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + k\pi\right\} (k \in \mathbf{Z})$.